Devoir surveillé n°6
4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Exercice A

On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant des lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ respectivements.

1. Rappeler quelles situations peuvent être modélisées par une loi de Poisson.
2. Quelle est la loi de $S = X + Y$? Quelle est son espérance ? Sa variance ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que
$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \mathbb{P}_{(S=n)}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \end{cases}$$
avec $p \in]0, 1[$ à préciser. Que peut-on en déduire pour la loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$? Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant $(S = n)$?
4. On sait qu'il y a en moyenne 10 accidents la semaine ouvrable (5 jours) et un accident le week-end (2 jours) sur un tronçon routier.
Cette semaine, 11 accidents au total ont eu lieu, sans plus de précision.
Quelle est la probabilité (conditionné par cette connaissance) qu'il y ait eu 1 accident le week-end ?

Exercice B :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{B}(p)$ avec $\lambda > 0$ et $p \in]0, 1[$.
On note $Z = XY$ et G_X, G_Y et G_Z les fonctions génératrices de X, Y et Z respectivement.

1. Déterminer $Z(\Omega)$.
2. Exprimer $(Z = 0)$ à l'aide d'événements $(X = k)$ et $(Y = k)$.
Montrer que $\mathbb{P}(Z = 0) = q + p\mathrm{e}^{-\lambda}$ où $q = 1 - p$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(Z = n)$ à l'aide d'événements $(X = k)$ et $(Y = k)$ et en déduire $\mathbb{P}(Z = n)$.
4. Précisez G_X et G_Y. En déduire que $G_Z = G_Y \circ G_X$.
5. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
6. Montrer que Z admet une variance et la calculer.

Exercice C

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2, c'est à dire telle que X^2 est d'espérance finie. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes discrètes réelles de même loi que X et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \geqslant 1$.

1. (*) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. (*) Montrer que si $\delta > 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geqslant n\delta) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2}$$

3. Soit u et v deux réels de sorte que $u < \mathbb{E}(X) < v$, on pose $\delta = \min(v - \mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X) - u)$.
   (a) (**) Montrer que $(nu < S_n < nv) \supset (|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta)$. On pourra s'aider d'un dessin.
   (b) (*) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}(nu \leqslant S_n \leqslant nv)$.

Problème A

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit X une variable aléatoire finie, avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour tout entier n de $\{1, \ldots, n\}$, on note $p_n = P(X = x_n)$. On suppose que pour tout i, $p_i > 0$. On définit l'entropie de X par

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{1}{p_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)$$

   Intuitivement, l'entropie d'une variable aléatoire a été défini ainsi comme mesure du désordre[1]
   (a) Montrer que $H(X) \geqslant 0$. Que peut-on dire de X lorsque $H(X) = 0$? En terme d'entropie ?
   (b) On suppose que $X = U \sim \mathcal{U}(1, \ldots, n)$. Montrer que $H(U) = \ln(n)$.
   (c) On suppose X quelconque.
      i. Montrer que $\forall u > 0$, $\ln(u) \leqslant u - 1 \quad (*)$ et qu'il y a égalité si et seulement si $u = 1$.
      ii. Montrer alors que $H(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant \ln(n) = H(U)$ et qu'il y a égalité si et seulement si on a $p_i = \frac{1}{n}$ pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$.
      iii. Conclure en terme d'entropie.
2. Soit maintenant X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On définit l'entropie de X par

$$H(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} -P(X = k)\ln(P(X = k)) \in [0, +\infty]$$

   avec l'hypothèse que $P(X = k) > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que $H(X)$ est bien défini à valeurs dans $[0, +\infty]$.
   (b) Que peut-on dire de X si $H(X) = 0$?
   (c) On suppose que $X = G \sim \mathcal{G}(p)$ géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On rappelle que X admet une espérance finie et que $E(X) = \frac{1}{p} = m$. On note $p_k = P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et ainsi

$$H(G) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln\left(\frac{1}{p_k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} -p_k \ln(p_k)$$

   Montrer que G admet une entropie finie et la calculer. On obtiendra

$$H(G) = -\ln(p) - \frac{1-p}{p}\ln(1-p).$$

1. 1948, Claude Shannon, ingénieur en génie électrique aux Laboratoires Bell

(d) Soit X quelconque, d'espérance finie $m = \dfrac{1}{p}$ égale à celle de G.

On pose $q_k = P(X = x_k) > 0$ et ainsi

$$H(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_k \ln\left(\frac{1}{q_k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} -q_k \ln(q_k)$$

avec $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kp_k = m = \frac{1}{p}$.

i. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a

$$-q_k \ln(q_k) + q_k \ln(p_k) \leqslant p_k - q_k$$

(on utilisera pour cela (*) appliquée à $\frac{p_k}{q_k}$) puis que

$$-q_k \ln(q_k) \leqslant -q_k \ln(p) - (k-1)q_k \ln(1-p) + p_k - q_k$$

ii. En déduire que X admet une entropie finie et que $H(X) \leqslant H(G)$ et qu'il y a égalité si et seulement si X a la même loi que G.

iii. Exprimer ce résultat en termes d'entropie.

3. Pour une variable aléatoire discrète X on note désormais d'après la justification de la question 2a)

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} -P(X = x) \ln(P(X = x)) \in [0, +\infty]$$

Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors

$$H((X, Y)) = H(X) + H(Y).$$

On rappelle que $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et que la loi du couple (X, Y) est donnée par les $P(X = x, Y = y)$ pour $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Problème B : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. Á chaque instant $t \in \mathbb{N}^*$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbb{Z}$ à la position $k + 1$ ou $k - 1$.

Soit $p \in]0, 1[$. On définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t$.

Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_t modélise le déplacement de la particule à l'instant t.
Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n modélise la position de la particule après n déplacements.
On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Partie I - Un développement en série entière

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

2. En déduire que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \mathbb{P}(S_n = 0).$$

1. Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X_t + 1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} \big(p(1-p)\big)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$ selon les valeurs de p et interpréter le résultat.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} O_{2j}$. On note $\mathbb{E}(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire T_n.
Dans cette partie, on souhaite déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que modélise la variable aléatoire T_n ?
2. Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire O_{2j}. En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} \big(p(1-p)\big)^j.$$

3. On suppose dans cette question que $p \neq \dfrac{1}{2}$. En utilisant le résultat de la **I.2**, calculer ds $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.
4. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Exercice A

1. On peut modéliser une variable aléatoire comme variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque la variable aléatoire est égale au nombre d'un certain type d'événement se produisant par unité, λ étant la moyenne.
2. On sait que si X et Y indépendantes suivent des lois de Poisson de paramètre λ et μ, alors la variable aléatore $S = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$, d'espérance et de variance $\lambda + \mu$. On peut le prouver rapidement par la fonction génératrice, puisque, par indépendance de$X$ et Y

$$G_S(t) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.\mathrm{e}^{\mu(t-1)} = \mathrm{e}^{[\lambda+\mu)(t-1)}$$

   et comme la fonction génératrice caractérise la loi, $S = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}_{(S=n)}(X = k) = \frac{\mathbb{P}(S = n, X = k)}{\mathbb{P}(S = n)} = \frac{\mathbb{P}(X + Y = n, X = k)}{\mathbb{P}(S = n)} = \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathbb{P}(S = n)}$$

   Ainsi, pour $k > n$, $n - k < 0$ et $\mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = 0$ et donc $\mathbb{P}_{(S=n)}(X = k)$.
   Si $k \leqslant n$, on a par indépendance

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(S=n)}(X = k) &= \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathbb{P}(S = n)}\frac{\mathbb{P}(X = k).\mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(S = n)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \times \mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\mathrm{e}^{-\lambda-\mu}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

   et ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \mathbb{P}_{(S=n)}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \end{cases}$$

   avec $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. La loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
   De même, la loi conditionnelle de Y sachant $(S = n)$ est $\mathcal{B}(n, 1 - p)$.
4. On sait qu'il y a en moyenne 10 accidents la semaine ouvrable (5 jours) et un accident le week-end (2 jours) sur un tronçon routier.
   Cette semaine, 11 accidents au total ont eu lieu, sans plus de précision.
   On note X la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre d'accidents de la semaine ouvrable, et Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre d'accidents du week-end. On suppose que X et Y sont indépendantes de loi de Poisson respectivement de paramètre 10 et 1.
   On note $S = X+Y$, la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre d'accidents sur la semaine complète, de Poisson de paramètre $10 + 1 = 11$. On a alors la probabilité qu'il y ait eu 1 accident le week-end sachant que 11 accidents ont eu lieu sur toute la semaine qui vaut

$$\mathbb{P}_{(S=11)}(Y = 1) = \binom{11}{1}\left(\frac{1}{11}\right)^1\left(\frac{10}{11}\right)^{10} = \left(\frac{10}{11}\right)^{10} \approx 0,38 \approx 38\%$$

Exercice B :

1. Comme X prend des valeurs entières et Y 0 ou 1, $Z = XY$ prend des valeurs entières et donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
   Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}$, si X prend la valeur n et Y la valeur 1, $Z = XY$ prend la valeur n.
   Ainsi $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

2. Nous avons $(Z=0)=(Y=0)\cup(Y=1)\cap(X=0)$, la rénion étant disjointe, et ainsi

$$\mathbb{P}(Z=0)=\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}((Y=1)\cap(X=0))$$

et comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(Z=0)=\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(Y=1).\mathbb{P}(X=0)$$

et comme $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$ et $Y\sim B(p)$, on a donc finalement $\mathbb{P}(Z=0)=(1-p)+p\mathrm{e}^{-\lambda}=q+p\mathrm{e}^{-\lambda}$.

3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, nous avons $(Z=n)=(X=n)\cap(Y=1)$ et donc $\mathbb{P}(Z=n)=p\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$. Ainsi si $t\in[-1,1]$,

$$\begin{aligned}[G_Z(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z=n)t^n\\ &= \mathbb{P}(Z=0)+p\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)t^n\\ &= (1-p)+p\mathrm{e}^{-\lambda}+p(G_X(t)-\mathbb{P}(X=0))\\ (1-p)+pG_X(t) &= G_Y(G_X(t))=G_Y\circ G_X(t)\end{aligned}$$

On en déduit que $G_Z=G_Y\circ G_X$, valide en fait sur $\mathbb{R}$, avec

$$G_Z(t)=q+p\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

et ainsi G_Z est une fonction génératrice sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4. Comme G_Z est dérivable en 1, Z admet une espérance et on a

$$\mathbb{E}(Z)=G'_Z(1)=\lambda p$$

5. Comme G_Z est deux fois dérivable en 1, Z admet une variance et on a

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Z) &= G''_Z(1)+G'_Z(1)-G'_Z(1)^2\\ &= p\lambda^2+\lambda p-p^2\lambda^2\\ &= pq\lambda^2+p\lambda=p\lambda(q\lambda+1)\end{aligned}$$

Exercice C

1. Si X et de carré d'espérance finie, alors pour tout$\varepsilon>0$, on a

$$\mathbb{P}(X-\mathbb{E}(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

2. Soit $\delta>0$, et $n\in\mathbb{N}^*$, on a par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(S_n)=n\mathbb{E}(X)$$

et par indépendances $\mathbb{V}(S_n)=n\mathbb{V}(X)$. Ainsi en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire S_n et à la précision $\varepsilon=n\delta>0$, on obtient

$$\mathbb{P}(|S_n-n\mathbb{E}(X)|\geqslant n\delta)\leqslant\frac{nV(X)}{(n\delta)^2}=\frac{V(X)}{n\delta^2}$$

3. Cela «se voit sur un dessin». Précisément, si $|S_n-n\mathbb{E}(X)|<n\delta$, alors

$$-n\delta<S_n-n\mathbb{E}(X)<n\delta$$

et ainsi

$$-n\delta+n\mathbb{E}(X)<S_n<n\delta+n\mathbb{E}(X)$$

soit encore
$$n(\mathbb{E}(X)-\delta) < S_n < n(\mathbb{E}(X)+\delta)$$
Or $\delta \leqslant v-\mathbb{E}(X)$ et ainsi $\mathbb{E}(X)+\delta \leqslant v$ et $\delta \leqslant \mathbb{E}(X)-u$ et ainsi $u \leqslant \mathbb{E}(X)-\delta$ et donc finalement on a bien
$$nu < S_n < nv$$
Ainsi $(|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta) \subset (nu \leqslant S_n \leqslant nv)$ et donc
$$\mathbb{P}((|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta) \leqslant \mathbb{P}(nu \leqslant S_n \leqslant nv)$$
Avec la question précédente, on a
$$1 \geqslant \mathbb{P}(nu \leqslant S_n \leqslant nv) \leqslant \mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta) = 1 - \mathbb{P}((|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geqslant n\delta) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2}$$
et donc par encadrement, on obtient
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(nu \leqslant S_n \leqslant nv) = 1$$

Problème A

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) On a pour tout i de $\{1,\dots,n\}$, $\ln(p_i) < 0$ et ainsi $-p_i\ln(p_i) \geqslant 0$ et donc $H(X) \geqslant 0$. Lorsque $H(X) = 0$, on doit avoir donc $\forall i \in \{1\dots,n\}$, $p_i\ln(p_i) = 0$, et ainsi $\ln(p_i) = 0$ et ainsi $p_i = 1$. Cela entraîne que $n = 1$ avec $p_1 = 1$ et X est la variable aléatoire constante à x_1. La réciproque est évidente.

   (b) Nous avons dans ce cas $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$ et ainsi
   $$H(U) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(n) = \ln(n).$$

   (c) On suppose X quelconque.

   i. On étudie la fonction f définie par $f(u) = \ln(u) - u + 1$ sur $]0,+\infty[$, qui est dérivable, avec $f'(u) = \frac{1}{u} - 1 = \frac{1-u}{u}$. On en déduit les variations de f et donc le fait que f admet un maximum strict lorsque $u = 1$ qui vaut 0, et ainsi $\forall u > 0$, $\ln(u) \leqslant u-1$ et on a égalité si et seulement si $u = 1$.

   ii. Ainsi (on fait apparaître $\ln(n)$) :
   $$\begin{aligned} H(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{n}{np_i}\right) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\ln(n) + p_i\ln\left(\frac{1}{np_i}\right) \leqslant \ln(n) + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} - p_i \\ &\leqslant \ln(n) + 1 - 1 = \ln(n) \end{aligned}$$
   et il y a égalité si et seulement chaque inégalité utilisée est une égalité si et seulement si on a $np_i = 1$ (d'où aussi la méthodologie de faire apparaître np_i) c'est à dire $p_i = \frac{1}{n}$ pour tout i de $\{1,\dots,n\}$.

   iii. Ainsi la loi uniforme est la loi qui permet d'obtenir l'entropie (le désordre) maximum. La loi constante donne l'entropie minimale, l'ordre maximum.

2. Soit maintenant X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On définit l'entropie de X par
$$H(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} -P(X=k)\ln(P(X=k)) \in [0,+\infty]$$
avec l'hypothèse que $P(X=k) > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   (a) Comme $0 < P(X=k) \leqslant 1$, $-\ln(P(X=k) \geqslant 0$ et donc $H(X)$ est à valeurs dans $[0,+\infty]$.

(b) Si $H(X)=0$, alors pour tout $k \geqslant 1$, $P(X=k)\ln(P(X=k))=0$ et comme on a supposé que $P(X=k)>0$, on a $\ln(P(X=k))=0$, soit $P(X=k)=1$, ce qui est absurde ici. Ainsi nous avons de toute façon $H(X)>0$ (il y a ici une infinité dénombrable de valeurs effectivement prises, et pas qu'une seule).

(c) On suppose que $X=G\sim\mathcal{G}(p)$ géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Ainsi comme nous avons des termes positifs,

$$H(G)=\sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln\left(\frac{1}{p_k}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty} -p_k\ln(p_k)\in[0,+\infty]$$

On a (nous effectuons les calculs avec des séries à termes positifs)

$$\begin{aligned}
H(G)&=\sum_{k=1}^{+\infty} -p(1-p)^{k-1}\left(\ln(p)+(k-1)\ln(1-p)\right)\\
&=-p\ln(p)\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}}_{=\frac{1}{1-(1-p)}}-p\ln(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(1-p)^{k-1}\\
&=-\ln(p)-p\ln(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

Pour cette dernière somme, nous pouvons utiliser l'astuce de la double somme de termes positifs

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(1-p)^{k-1}&=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k-1}(1-p)^{k-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n\times\frac{1}{1-(1-p)}=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n=\frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

ou encore utiliser la série entière sur $]-1,1[$ $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$ que l'on dérive en

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}$$

et ainsi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}=f'(1-p)=\frac{1}{p^2}$$

puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\frac{1-p}{p^2}$$

On a donc finalement l'entropie de la loi géométrique qui est finie avec

$$E(G)=-\ln(p)-\frac{1-p}{p}\ln(1-p).$$

(d) Soit X quelconque, d'espérance finie $m=\dfrac{1}{p}$ égale à celle de G.

i. Soit k de $\mathbb{N}^*$, on a en appliquant (*) à $\frac{p_k}{q_k}$

$$\ln\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\leqslant\frac{p_k}{q_k}-1$$

et ainsi en multipliant par $q_k > 0$

$$-q_k \ln(q_k) + q_k \ln(p_k) \leqslant p_k - q_k$$

d'où sachant que $p_k = p(1-p)^{k-1}$,

$$-q_k \ln(q_k) \leqslant -q_k \ln(p) - (k-1)q_k \ln(1-p) + p_k - q_k$$

ii. Sachant que le terme à droite donne en sommant de manière partielle, puis totale

$$-\ln(p) - \frac{1}{p}\ln(1-p) + \ln(1-p) + 1 - 1 = H(G)$$

on en déduit par comparaison (série à termes positifs) que X admet une entropie finie avec $H(X) \leqslant H(G)$. De plus il y a égalité si et seulement si pour tout k, il y a égalité dans les inégalités initiales, c'est à dire $\frac{p_k}{q_k} = 1$ soit encore $q_k = p_k$, c'est à dire si et seulement si X a la même loi que G.

iii. Ainsi la loi géométrique est celle d'entropie maximale parmi les lois sur $\mathbb{N}^*$ ayant la même espérance. L'entropie minimale serait atteinte pour une loi constante (ou presque constante) sur $\mathbb{N}^*$. Il aurait fallu définir l'entropie un peu différemment pour intégrer ces situations particulières.

3. Soit X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors par sommation dénombrable de termes positifs, et l'indépendance de X et Y, $H((X,Y)$ vaut

$$\begin{aligned}
&\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} -P((X=x, Y=y))\ln(P((X=x,Y=y)) \\
&= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} -P(X=x)P(Y=y)(\ln(P(X=x)) + \ln(P(Y=y))) \\
&= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} -P(X=x)P(Y=y)\ln(P(X=x)) \\
&\quad + \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} -P(X=x)P(Y=y)\ln(P(Y=y)) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} -P(X=x)\ln(P(X=x) \underbrace{\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)}_{=1} \\
&\quad + \sum_{y\in Y(\Omega)} -P(Y=y)\ln(P(Y=y)) \underbrace{\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)}_{=1} \\
&= H(X) + H(Y)
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien $H((X,Y)) = H(X) + H(Y)$.

Problème B

Partie I – Un développement en série entière

1. C'est un développement en série entière usuel. On a, pour rappel :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!} x^n.$$

2. Soit $x \in]-1,1[$. Posons $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans l'identité de la question précédente. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $-x \in]-1,1[$, et on peut donc évaluer en $-x$ l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-x)^n.$$

Simplifions le terme général. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\cdot(2k+1)\right)=\frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1).$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard : on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître le produit de tous les entiers jusqu'à un certain rang (et donc une factorielle), et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{(2n)!}{2^n\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)=\frac{(-1)^n}{2^n}\times\frac{(2n)!}{2^n n!}=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

Comme, de plus, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a : $(-x)^n=(-1)^n x^n$, on en déduit le développement en série entière plus compact :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n,$$

d'où le résultat, étant donné que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Partie II – Probabilité de retour à l'origine

1. Soit $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a $X_t(\Omega)=\{-1,1\}$ et $X_t=-1$ si et seulement si $\dfrac{X_t+1}{2}=0$, et $X_t=1$ si et seulement si $\dfrac{X_t+1}{2}=1$. Ainsi $\left(\dfrac{X_t+1}{2}\right)(\Omega)=\{0,1\}$, ce qui assure déjà que $\dfrac{X_t+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli. De plus,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_t+1}{2}=1\right)=\mathbb{P}(X_t=1)=p.$$

Ainsi $\dfrac{X_t+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Alors $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}$ est une somme de n variables de Bernoulli de même paramètre p, indépendantes grâce au lemme des coalitions (puisque les X_t le sont par hypothèse), donc on sait que $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On remarque que l'on a :

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{t=1}^{n}X_t+\sum_{t=1}^{n}1\right)=\frac{S_n+n}{2}.$$

On en déduit :

$$S_n=0 \Longleftrightarrow \sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}=\frac{n}{2}.$$

Or : $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}\sim\mathcal{B}(n,p)$, donc en particulier : $\displaystyle\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}\right)(\Omega)=[\![0,n]\!]$. On retient surtout que c'est une variable aléatoire à valeurs entières, donc si n est impair, on a $\displaystyle\frac{n}{2}\notin\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}\right)(\Omega)$, donc : $\displaystyle\mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}=\frac{n}{2}\right)=0$. Par l'équivalence ci-dessus, on a donc aussi, si n est impair : $\mathrm{P}(S_n=0)=0$.

Si n est pair, alors $\dfrac{n}{2} \in [\![0, n]\!]$ et on a, pour une loi binomiale de paramètres n et p :

$$\mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t + 1}{2} = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} p^{n/2}(1-p)^{n-n/2} = \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2}.$$

Ainsi, si n est pair : $\mathbb{P}(S_n = 0) = \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2}$. Comme $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$, on a bien montré :

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors $2n$ est un entier pair, donc on a :

$$u_{2n} = \binom{2n}{n}(p(1-p))^n.$$

Or, d'après la formule de Stirling :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

On en déduit :

$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Or l'application $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum sur $[0,1]$ en $x = \frac{1}{2}$, et ce maximum vaut $\frac{1}{4}$. Donc, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 0. Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} = 0$. Deux suites équivalentes ayant même limite, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0.$$

Ainsi, après un temps arbitrairement long, il est presque certain que le mobile ne se trouve pas en l'origine (n'oublions pas que $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc les deux suites extraites des indices pairs et des indices impairs ont la même limite, et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$).

Partie III – Nombre de passages par l'origine

1. La variable aléatoire T_n compte le nombre de passages du mobile à l'origine entre le début de l'observation et l'instant $2n$.
2. Comme : $O_{2j}(\Omega) = \{0, 1\}$, la variable aléatoire O_{2j} suit une loi de Bernoulli. On détermine son paramètre en calculant la probabilité qu'elle soit égale à 1. Or :

$$O_{2j} = 1 \iff S_{2j} = 0,$$

donc : $\mathbb{P}(O_{2j} = 1) = \mathrm{P}(S_{2j} = 0) = u_{2j} = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$. En résumé :

$$O_{2j} \sim \mathcal{B}\left(\binom{2j}{j}(p(1-p))^j\right).$$

Donc : $\mathbb{E}(O_{2j}) = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} (p(1-p))^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{(j!)^2} (p(1-p))^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} (4p(1-p))^j.$$

Comme $p \neq \frac{1}{2}$, l'étude des variations de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ montre qu'on a : $0 \leqslant 4p(1-p) < 1$. Ainsi $4p(1-p)$ appartient à l'intervalle ouvert de convergence du développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. On en déduit que la série $\sum\limits_{j \geqslant 0} \dfrac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j$ converge, et que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} (4p(1-p))^n = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} (4p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}.$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$. Le membre de droite de cette égalité est croissant (comme fonction de p) sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et décroissant sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ (en vérité, le fait que cette quantité reste inchangée en composant par $p \mapsto 1-p$ assure que le graphe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$, donc l'étude sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ suffit). Quand $p \to 0^+$, cette quantité vaut 1 et quand $p \to \frac{1}{2}^-$, elle tend vers l'infini.
On en déduit qu'après un temps infini, le mobile passe un nombre fini de fois en moyenne par l'origine : en moyenne une fois environ si p est proche de 0 ou de 1 (ce qui correspondrait logiquement au fait que la position initiale soit l'origine).

4. Notons que si $p = \frac{1}{2}$, alors on a d'après la question 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}} \binom{2j}{j}.$$

On montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors : $\mathbb{E}(T_0) = \sum\limits_{j=0}^{0} \dfrac{1}{2^{2j}} \dbinom{2j}{j} = \dfrac{1}{2^{2\cdot 0}} \dbinom{2 \cdot 0}{0} = \dfrac{2 \cdot 0 + 1}{2^{2 \cdot 0}} \dbinom{2 \cdot 0}{0}$. D'où le résultat au rang $n = 0$.
À présent, montrons l'hérédité de cette formule. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n}$. Alors :

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \mathbb{E}(T_n + O_{2(n+1)}) = \mathbb{E}(T_n) + \frac{1}{2^{2(n+1)}} \binom{2(n+1)}{n+1}.$$

Et donc, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{n+1}) &= \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2(n+1)}} \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+1)(2n)!}{2^{2n} n! n!} + \frac{(2n+2)!}{2^{2(n+1}(n+1)(n+1)} \\ &= \frac{4(2n+1)(n+1)(n+1)(2n)! + (2n+2)!}{2^{2(n+1)}(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2(n+1)+1)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+3)}{2^{2((n+1)}} \binom{2(n+1)}{n+1}\end{aligned}$$

d'où l'hérédité : le résultat au rang n implique le résultat au rang $n+1$.
Par principe de récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n}$. En reprenant le calcul d'équivalent de la question 3, on en déduit :

$$\mathrm{E}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n+1}{2^{2n}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = +\infty$. Ainsi, en moyenne, la particule passe une infinité de fois par l'origine quand on observe l'expérience pendant un temps arbitrairement long.