Quinzaine 10 du 17/02 au 07/03

Chapitre 7 : *Intégration sur un intervalle quelconque*
Intégrales à paramètre.
Théorème de continuité :
Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que : – pour tout $t \in I$,

$$x \mapsto f(x,t)$$

est continue sur A ;
– pour tout x de A,

$$t \mapsto f(x,t)$$

est continue par morceaux sur I ;
– il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.
Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de A ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu :
Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :
– pour tout $t \in I$,

$$f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell(t)$$

– pour tout x de A,

$$t \mapsto f(x,t) \qquad t \mapsto \ell(t)$$

sont continue par morceaux sur I ;
– il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction $t \mapsto \ell(t)$ est intégrable sur I et

$$\int_I f(x,t)\mathrm{d}t \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\mathrm{d}t$$

Théorème de dérivation : Si A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :
– pour tout $t \in I$,

$$x \mapsto f(x,t)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
– pour tout x de A,

$$t \mapsto f(x,t)$$

est continue par morceaux sur I et intégrable sur I ;
– pour tout x de A,

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$$

est continue par morceaux sur I ;
– il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction g définie par

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et on a sur A

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t$. et d'intégrabilité des $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t$ pour $0 \leqslant j < k$.
Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de A ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Chapitre 8 : *Espaces euclidiens*
Révisions : produit scalaire. Espace préhilbertien, espaces euclidiens.
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Produit scalaire intégral sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expression X^TY. Exemples de produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$, sur $\mathbb{R}[X]$.
Produit scalaire défini par des intégrales généralisées.
Norme associée à un produit scalaire. Distance associée à la norme.
Relations entre produit scalaire et norme, identité du parallélogramme (*).
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Propriétés caractéristiques d'une norme (séparation, homogénéité, inégalité triangulaire), cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
Vecteurs orthogonaux. Théorème de Pythagore.
Orthogonal $A^\perp$ d'une partie A. Structure de sous-espace.
Vecteur unitaire. Famille orthogonale. Famille orthonormale ou orthonormée. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. **Important :** expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée et notation matricielle.

Important : rappels sur le le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace F de dimension finie dans un espace préhilbertien : existence du supplémentaire orthogonal, projection orthogonale, expression du projeté orthogonal à l'aide d'une base orthonormée de F, distance à F, réalisation de la distance à F par le projeté orthogonal.
Cas des hyperplans en dimension finie et projection par dualité sur la droite orthogonale.

Isométries vectorielles : un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.
Une application linéaire qui conserve la norme est injective.
En dimension finie, une application linéaire qui conserve la norme est un automorphisme.
Autre dénomination des isométries vectorielles d'un espace euclidien : automorphismes orthogonaux.
Groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$.
Stabilité par produit, par réciproque (*).

Caractérisations par la conservation du produit scalaire (*), par l'image d'une (de toute) base orthonormale (*).
Exemple des symétries orthogonales et réflexions orthogonales.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable d'une isométrie vectorielle.

Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.
Matrices orthogonales. Interprétation en termes de colonnes et de lignes, d'inverse.
Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Groupe orthogonal $\mathcal{O}(n)$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Stabilité par produit, inverse.

Description des matrices de $\mathcal{O}(2)$ (*).
Cas particulier en dimension 3 : obtention de la forme des matrices des réflexions orthogonales de $\mathbb{R}^3$ à l'aide de la formule de projection orthogonale sur une droite.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.