Devoir surveillé n°7
3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Exercice A

Pour tout réel p et q, tous deux strictement supérieurs à -1, on pose sous réserve de convergence

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q \mathrm{d}x = \int_0^1 x^p(-\ln(x))^q \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que, pour tout réel p et tout réel q, tous deux strictement supérieurs à -1, la fonction $x \mapsto x^p(-\ln(x))^q$ est continue sur $]0,1[$.
2. Montrer que si $\alpha > 0$ et $\beta > -1$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}x^\beta$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que, pour tout réel p et tout réel q, tous deux strictement supérieurs à -1, l'intégrale $I(p,q)$ est convergente et que

$$I(p,q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(p+1)x}x^q \mathrm{d}x$$

   On effectuera le changement de variable $u = -\ln(x)$.
4. Montrer que, pour tout réel p et tout réel q, tous deux strictement supérieurs à -1,

$$I(p,q) = \frac{1}{(p+1)^{q+1}} I(0,q)$$

5. (a) Montrer que pour tout réel q strictement positif,

$$I(0,q) = qI(0,q-1)$$

   (b) En déduire $I(p,q)$ pour p réel strictement supérieur à -1 et pour tout q **entier positif ou nul**.

Exercice B

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, sous réserve d'existence

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\mathrm{d}u \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

1. Montrer que la fonction $\psi : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.
2. Montrer que si $x > 0$, $F(x)$ est définie. F est-elle définie en 0 ?
3. (a) Montrer que $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et que si $a > 0$,

$$\forall x \geqslant a\,,\ \forall u \in I\,,\ \left|\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\right]\right| \leqslant \frac{1}{a^2}\psi(u)$$

   (b) En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme d'intégrale.
4. (a) En utilisant une primitive de $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ et une intégration par parties, montrer que si $x \in I$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{-u}}{(x+u)\sqrt{u}}\mathrm{d}u + 2\int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{-u}}{(x+u)^2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

   (b) En utilisant le fait que $u = x + u - x$, déduire alors que si $x \in I$, on a

$$F(x) = 2K - 2xF(x) + 2F(x) + 2xF'(x)$$

   puis que

$$xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K.$$

5. Pour tout x de I, on pose $G(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}F(x)$. Montrer que G est dérivable sur I, que $G'(x) = -K\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$, et qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout x de I,

$$G(x) = C - K\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

6. Montrer que F est positive et décroissante. En déduire la limite de $\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}F(x)$ en $+\infty$. En déduire que $C = K^2$.
7. Soit $x > 0$, montrer à l'aide d'un changement de variable que

$$\sqrt{x}F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$$

   et montrer alors que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$$

   Calculer cette dernière intégrale en posant $v = \sqrt{t}$.
8. Déduire la valeur de K.

Exercice C

1. On considère l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\mathrm{d}x.$$

   (a) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1[$. Que peut-on en déduire pour I ?

   (b) On pose sur $]0,1[$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = (-1)^n \ln(x) x^n$. Montrer que la série de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur $]0,1[$.

   (c) Montrer que les fonctions f_n sont toutes intégrables sur $]0,1[$ et que l'on a $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$. Que vaut $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x$?

   (d) Montrer que l'on a

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2. On considère l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

   (a) Jusfifier l'existence de J.

   (b) On pose sur $]0,1[$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{\sqrt{x}}$. Montrer que les fonctions f_n sont toutes intégrables sur $]0,1[$ et que l'on a $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{}$. Que vaut $\displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\mathrm{d}x$? Conclusion ?

   (c) Montrer que si $x \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$|S_N(x)| = \left| \sum_{n=0}^{N} g_n(x) \right| \leqslant \frac{2}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

   (d) En déduire que

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

   (e) Calculer J directement à l'aide d'un changement de variable adapté et en déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

   somme alternée des inverses des entiers impairs.

Exercice A

1. La fonction $x \mapsto e^{p\ln(x)} \times e^{q\ln(-\ln(x)))}$ est bien définie et continue sur $]0,1[$ par produit puisque si $x \in]0,1[$, $-\ln(x) > 0$, et ainsi $x \mapsto e^{p\ln(x)}$ et $x \mapsto e^{q\ln(-\ln(x)))}$ sont définies et continues sur $]0,1[$.
2. Soit $\alpha > 0$ et $\beta > -1$, $x \mapsto e^{-\alpha x}x^\beta$ est continue sur $]0,1[$ et nous avons
$$x^2 e^{-\alpha x}x^\beta = x^{beta+2}e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
et donc $e^{-\alpha x}x^\beta = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ce qui assure l'intégrabilité en $+\infty$, et
$$e^{-\alpha x}x^\beta \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{-\beta}}$$
avec $-\beta < 1$, ce qui assurre l'intégrabilité en 0. Ainsi $x \mapsto e^{-\alpha x}x^\beta$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
3. Soit p et q, tous deux strictement supérieurs à -1, on considère l'intégrale généralisée
$$I(p,q) = \int_0^1 x^p(\ln\frac{1}{x})^q \mathrm{d}x$$
et on effectue le changement de variable généralisé $y = \ln\frac{1}{x} = -\ln x$ de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$, mais décroissant, avec $\mathrm{d}y = -\frac{1}{x}\mathrm{d}x$, $x = e^{-y}$, $\mathrm{d}x = -e^{-y}\mathrm{d}y$, ce qui conduit à l'intégrale
$$-\int_0^{+\infty} e^{-yp}y^q(-1)e^{-y}\mathrm{d}y$$
soit encore
$$\int_0^{+\infty} e^{-(p+1)y}y^q\mathrm{d}y$$
Elles sont de même nature, donc convergente d'après la question 2, et on a
$$I(p,q) = \int_0^1 x^p(\ln\frac{1}{x})^q\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} e^{-py}y^q(-e^{-y})\mathrm{d}y$$
soit encore (on utilise la variable muette x au lieu de y)
$$I(p,q) = \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)x}x^q\mathrm{d}x$$
4. On effectue alors le changement de variable $u = (p+1)x$, $\mathrm{d}u = (p+1)\mathrm{d}x$, de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, strictement croissant
$$I(p,q) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{p+1}\right)^q\frac{\mathrm{d}u}{p+1} = \frac{1}{(p+1)^{q+1}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^q\mathrm{d}u = \frac{1}{(p+1)^{q+1}}I(0,q)$$
5. (a) Soit q réel strictement positif,
$$I(0,q) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^q\mathrm{d}x$$
On effectue une intégration par parties généralisée, avec convergence de l'intégrale initiale, et
$$\begin{cases} f'(x) = e^{-x} \\ f(x) = -e^{-x}\end{cases} \qquad \begin{cases} g'(x) = qx^{q-1} \\ g(x) = x^q\end{cases} \qquad f(x)g(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad f(x)g(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^q \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}x^q\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-x}qx^{q-1}\mathrm{d}x$$
$$= q\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{q-1}\mathrm{d}x = qI(0,q-1)$$

et ainsi on a bien

$$I(0,q) = qI(0,q-1)$$

(b) Soit p réel strictement supérieur à -1 et q **entier positif ou nul**, nous avons alors en itérant la relation précédente (on peut faire une récurrence sur q de $\mathbb{N}$)

$$I(0,q) = q(q-1)\cdots 2I(0,1) = q!I(0,0) = q!\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = q!$$

bien valide si $q = 0$. Ainsi en combinant avec Q4, nous obtenons finalement

$$\forall p > -1\,,\, \forall q \in \mathbb{N}\,,\, I(p,q) = \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$$

Exercice B

1. La fonction $\psi : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur I et comme

$$\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}$$

elle est intégrable en 0 et comme par exmeple si $u \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \leqslant \mathrm{e}^{-u}$$

elle est aussi intégrable en $+\infty$. Donc ψ est intégrable sur I.

2. Soit $x > 0$, notons $g(u) = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ sur $I =]0,+\infty[$. La fonction g est continue sur I et on a

$$g(u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{u}}$$

et ainsi g est intégrable en 0, et par exemple si $u \geqslant 1$,

$$0 \leqslant g(u) \leqslant \mathrm{e}^{-u}$$

ce qui assure l'intégrabilité de g en $+\infty$. Ainsi g est intégrable sur I et on peut donc définir $F(x)$.

Par contre, si $x = 0$, comme $u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{u}}{u^{3/2}}$ est positive, la convergence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité, et nous avons

$$\frac{\mathrm{e}^{u}}{u^{3/2}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{u^{3/2}}$$

ce qui prouve la non intégrabilité en 0. On ne peut donc pas définir $F(0)$.

3. (a) La fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\right] = -\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(x+u)^2}$$

Ainsi si $a > 0$,

$$\forall x \geqslant a\,,\, \forall u \in I\,,\, \left|\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\right]\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}}{a^2\sqrt{u}} \leqslant \frac{1}{a^2}\psi(u)$$

(b) On applique le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre.
Nous avons $u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ continue et intégrable d'après la preuve de la question 2.
On a pour tout u de I, $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\right] = -\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(x+u)^2}$$

Pour tout $x > 0$, $u \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\right]$ continue sur I.
Sii $a > 0$,

$$\forall x \geqslant a\,,\ \forall u \in I\,,\ \left|\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\right]\right| \leqslant \frac{1}{a^2}\psi(u)$$

avec ψ qui est intégrable sur I.
On en déduit d'après le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre, que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a par dérivation sous le signe intégral pour $x > 0$,

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(x+u)^2}\mathrm{d}u$$

4. (a) En intégrant par parties comme indiqué, si $x \in I$, avec

$$\left\{f'(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} f(u) = 2\sqrt{u} \qquad \left\{g(u) = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u} g'(u) = -\frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u} - \frac{\mathrm{e}^{-u}}{(x+u)^2}\right.\right.$$

avec un terme entre crochet qui existe et vaut 0, nous obtenons

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(x+u)}\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}\left(\frac{1}{x+u} + \frac{1}{(x+u)^2}\right)\mathrm{d}u \ = 2\int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{-u}}{(x+u)\sqrt{u}}\mathrm{d}u + 2\int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{-u}}{(x+u)^2\sqrt{u}}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

(b) On utilise le fait que $u = x + u - x$, si $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{u + x - x\mathrm{e}^{-u}}{(x+u)\sqrt{u}}\mathrm{d}u + 2\int_0^{+\infty} \frac{u + x - x\mathrm{e}^{-u}}{(x+u)^2\sqrt{u}}\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u - 2x\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{(x+u)\sqrt{u}}\mathrm{d}u + +2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{(x+u)\sqrt{u}}\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(x+u)^2}\mathrm{d}u \\ &= 2K - 2xF(x) + 2F(x) + 2xF'(x) \end{aligned}$$

ce qui conduit à $0 = 2K + 2xF'(x) - (2x-1)F(x)$ puis

$$xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K.$$

5. La fonction G est dérivable sur I par produit de fonctions dérivables sur I, et on a

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}F(x) - \sqrt{x}F(x) + \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}F'(x) \\ &\frac{= (xF'(x) - xF(x) + \frac{1}{2}F(x))\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \\ &= -K\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

et ainsi en primitivant, il existe une constante réelle C' telle que pour tout x de I,

$$G(x) = C' - K\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

et par convergence de l'intégrale, et la relation de Chasles, il existe une constante réelle C telle que pour tout x de I,

$$G(x) = C - K\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

avec en fait $C = C' + K\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

6. Soit $x > 0$, comme $u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(x+u)}$ est positive, $F(x)$ est positif. De plus si $0 < x < y$, $u > 0$, on a $x + u < y + u$, puis

$$\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(x+u)} > \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(y+u)}$$

et ainsi en intégrant, $F(x) > F(y)$. Ainsi F est positive et décroissante. On en déduit que F admet une limite finie en $+\infty$. Comme $\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$ tend vers 0 en $+\infty$ par croissance comparée, $G(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}F(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Or $G(x)$ tend aussi vers $C - K^2$ en $+\infty$, ce qui permet d'en déduire que $C = K^2$.

7. Soit $x > 0$, on effectue le changement de variable $u = xt$, $\mathrm{d}u = x\mathrm{d}t$, bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de I sur I, qui conduit à

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{xt}(x+xt)}x\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$$

et ainsi

$$\sqrt{x}F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{xt}(x+xt)}x\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$$

Nous allons appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu : on a

$$\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} = \varphi(t)$$

et la domination si $x > 0$ et $t > 0$,

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur I, et ainsi nous pouvons passer à la limite sous l'intégrale

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$$

On calcule cette dernière intégrale en posant $v = \sqrt{t}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+v^2}\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}$$

8. On a $C = K^2$, et $C = \lim_{x\to 0} G(x)$ avec $G(x) \sim_{x\to 0} xF(x)$, et donc $K^2 = \frac{\pi}{2}$, $K = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice C

1. On considère l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\mathrm{d}x.$$

(a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x}$ est définie et continue sur $]0,1]$. Pour l'intégrabilité, nous avons

$$\frac{\ln(x)}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$$

ce qui assure l'intégrabilité de f en 0 et ainsi f est intégrable sur $]0,1[$. On en déduire que l'intégrale définie par I est absolument convergente donc convergente.

(b) On sait que si $x \in]0n1[$, on a

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

et ainsi

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln(x) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$$

Donc la série de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur $]0,1[$.

(c) On peut déjà remarquer que les fonctions f_n sont toutes de signe constant sur $]0,1[$, et ainsi l'intégrabilité et la convergence de l'intégrale sont équivalentes.

On procède par une intégration par parties généralisée, avec

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) v'(x) = x^n \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x)v(x) = \ln(x)\frac{x^{n+1}}{n+1} \longrightarrow_{x\to 0} 0 \\ u(x)v(x) = \ln(x)\frac{x^{n+1}}{n+1} \longrightarrow_{x\to 1} 0 \end{cases}$$

Les deux intégrales suivantes sont donc de même nature,

$$\int_0^1 \ln(x) x^n \mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} \mathrm{d}x$$

et comme la seconde est convergente, de valeur $\frac{1}{(n+1)^2}$, les fonctions f_n sont toutes intégrables sur $]0,1[$ et on a $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$ ainsi que $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$.

(d) Donc par application du théorème d'interversion intégrales généralisées et somme infinie, la série

$$\sum \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$$

étant convergente, on retrouve la fait que f est intégrable et que

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. On considère l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

(a) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$, et nous avons

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable en 0, on en déduit que f est intégrable sur $]0,1[$. On peut donc définir J.

(b) On pose sur $]0,1[$ et pour $n\in\mathbb{N}$, $g_n(x)=(-1)^n\dfrac{x^n}{\sqrt{x}}$.
Les fonctions g_n sont toutes continues sur $]0,1]$ et on a

$$g_n(x)\underset{x\to 0}{\sim}(-1^n x^{n-\frac{1}{2}}$$

avec $n-\frac{1}{2}>-1$ et ainsi comme $x\mapsto x^{n-\frac{1}{2}}$ intégrable en 0, la fonction g_n est intégrable sur $]0,1[$. De plus par primitive directe

$$\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x=(-1)^n\left[\frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^1=\frac{2(-1)^n}{2n+1}$$

Comme g_n est de signe constant, $\displaystyle\int_0^1|g_n(x)|\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}$. Ici, la série

$$\sum\int_0^1|g_n(x)|\mathrm{d}x$$

est divergente, le théorème d'interversion ne s'applique pas.

(c) Soit $x\in]0,1[$ et $N\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}|S_N(x)|&=\frac{1}{\sqrt{x}}\left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\right|\\&=\frac{1}{\sqrt{x}}\left|\frac{1-(-1)^{N+1}}{1-(-x)}\right|\\&\leqslant\frac{2}{(1+x)\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

(d) En déduire que

$$J=\int_0^1\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(e) On pose $u=\sqrt{x}$, bijective de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0,1[$ sur $]0,1[$, $\mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$,

$$J=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2\mathrm{d}u}{(1+u^2)}=2\operatorname{Arctan}(1)=\frac{\pi}{2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

somme alternée des inverses des entiers impairs.