Devoir n°7

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, pour tout entier naturel n.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$ et $T_1(X) = X$, puis la relation :

$$\forall n \geqslant 1\,,\ T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

Partie I : Étude de la suite des polynômes (T_n)

1. Déterminer les polynômes T_2 et T_3.
2. Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_m pour $m \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. (a) Établir par récurrence les relations suivantes pour tout nombre réel x :

   $$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ T_n(\cos x) = \cos(nx) \quad , \quad T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)$$

   On rappelle que

   $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\,,\ 2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \quad , \quad 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)$$

   (b) En déduire que $|T_n(u)| \leqslant 1$ pour $|u| \leqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que, pour tout u de $]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$ (on pourra poser $u = \operatorname{ch}(x)$).

   (d) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, et pour tout u de $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$.
5. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $T_n(\cos x) = 0$.

   (b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, T_n a n racines réelles dans $[-1, 1]$.

   (c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Donner la décomposition de T_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie II : Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

On associe à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale suivante :

$$(P|Q) = \int_0^{\pi} P(\cos(x))Q(\cos(x))\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \neq q$. Calculer $(T_p|T_q)$.

(b) Calculer $(T_0|T_0)$ et $(T_n|T_n)$ pour $n \geqslant 1$.

(c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(d) En utilisant les question I.2., II.2.b. et II.2.c., montrer que $(T_n|X^n) = \frac{\pi}{2^n}$.

3. Montrer que la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que pour tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on a

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$$