Quinzaine 11 du 17/03 au 28/03

Chapitre 8 : *Espaces euclidiens*
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation d'un espace euclidien. Bases orthonormées directes.
Isométries vectorielles d'un plan euclidien. Détermination des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté. Mesure de l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.
Composée de deux réflexions du plan euclidien.
Endomorphisme autoadjoint ou symétrique d'un espace euclidien. Notation $\mathcal{S}(E)$.
Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint par sa matrice dans une base orthonormée (*).
Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles : théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée des vecteurs propres ; toute matrice symétrique réelle est diagonalisable à l'aide d'une base orthonormée.
Preuve du fait que les valeurs propres complexes d'une matrice symétrique réelle sont réelles (*).
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation par le spectre.
Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Écriture de $(u(x)|y)$ ou $(AX|Y)$ à l'aide des coordonnées dans une base orthonormée et des coefficients de A et de $(u(x)|x)$ et $(AX|X)$. Cas A diagonale (ou base de vecteurs propres).

Chapitre 7 : *Espaces vectoriels normés*
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe ; espace vectoriel normé. Normes usuelles $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Exemple de la norme infinie sur l'espace des fonctions bornées.
Norme associée à un produit scalaire. Exemples usuels.
Distance associée à une norme. Boules ouvertes, boules fermées, sphères.
Parties convexes. Exemples. Convexité des boules (*).
Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.

Convergence et divergence d'une suite. Exemples divers. Unicité de la limite. Opérations. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

Comparaison des normes. Normes équivalentes. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes (pour contredire une inégalité). Invariance du caractère borné, de la convergence.
Comparaison des normes usuelles $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ (*) et interprétation graphique.

Questions de cours :
- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.