Devoir n°7

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, pour tout entier naturel n.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$ et $T_1(X) = X$, puis la relation :

$$\forall n \geqslant 1\,,\ T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

Partie I : Étude de la suite des polynômes (T_n)

1. Déterminer les polynômes T_2 et T_3.
2. Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_m pour $m \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. (a) Établir par récurrence les relations suivantes pour tout nombre réel x :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ T_n(\cos x) = \cos(nx) \quad , \quad T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)$$

On rappelle que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\,,\ 2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \quad , \quad 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)$$

   (b) En déduire que $|T_n(u)| \leqslant 1$ pour $|u| \leqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que, pour tout u de $]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$ (on pourra poser $u = \operatorname{ch}(x)$).
   (d) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, et pour tout u de $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$.
5. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $T_n(\cos x) = 0$.
   (b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, T_n a n racines réelles dans $[-1, 1]$.
   (c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Donner la décomposition de T_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie II : Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

On associe à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale suivante :

$$(P|Q) = \int_0^\pi P(\cos(x))Q(\cos(x))\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \neq q$. Calculer $(T_p|T_q)$.

(b) Calculer $(T_0|T_0)$ et $(T_n|T_n)$ pour $n \geqslant 1$.

(c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(d) En utilisant les question I.2., II.2.b. et II.2.c., montrer que $(T_n|X^n) = \frac{\pi}{2^n}$.

3. Montrer que la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que pour tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on a

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$$

Devoir n°7 : correction

1. On a $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2-1) - X = 4X^3 - 3X$.
2. Par récurrence totale, on montre simultannément que : « T_n de degré n, de parité de n, de coefficient dominant 2^{n-1} si $n \geqslant 1$ et 1 sinon».
   Cela est vrai aux rangs 0, 1, 2 et 3. On le suppose jusqu'au rang n. Alors on étudie T_{n+1}. On a
   $$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$
   et ainsi T_{n+1} est de degré $n+1$, de coefficient dominant 2^n. De plus, T_n de la parité de n, donc $2XT_n$ de la parité de $n+1$, comme T_{n-1} ($n-1$ ou $n+1$, c'est pareil) et ainsi T_{n+1} est de la parité de $n+1$ aussi, ce qui achève la récurrence.
3. La famille $(T_0, \dots, T_n)$ est donc une famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. (a) Soit x un réel. On procède par récurrence forte (ou double). On a :
   $T_0(\cos x) = 1 = \cos(0x)$ et $T_0(\operatorname{ch} x) = 1 = \operatorname{ch}(0x)$.
   $T_1(\cos(x)) = \cos x = \cos(1.x)$ et $T_1(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(1.x)$.
   On suppose les formules vraies jusqu'au rang n, $n \geqslant 1$; alors
   $$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos(x)) &= 2\cos x T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x) = 2\cos x \cos(nx) - \cos((n-1)x) \\ &= \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) - \cos(n-1)x) = \cos((n+1)x) \end{aligned}$$
   et de même (vu l'analogie des formules)
   $$\begin{aligned} T_{n+1}(\operatorname{ch}(x)) &= 2\operatorname{ch} x T_n(\operatorname{ch} x) - T_{n-1}(\operatorname{ch} x) = 2\operatorname{ch} x \operatorname{ch}(nx) - \operatorname{ch}((n-1)x) \\ &= \operatorname{ch}((n+1)x) + \operatorname{ch}((n-1)x) - \operatorname{ch}(n-1)x) = \operatorname{ch}((n+1)x) \end{aligned}$$
   ce qui achève notre récurrence.
   (b) Soit n un entier naturel, et soit $u \in [-1,1]$, il existe un réel x de sorte que $u = \cos x$ et ainsi
   $$T_n(u) = T_n(\cos x) = \cos(nx) \in [-1,1]$$
   et donc $|T_n(u)| \leqslant 1$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $u > 1$, on peut écrire $u = \operatorname{ch} x$ avec $x > 0$, et ainsi
   $$T_n(u) = T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx) > 1$$
   puisque $nx > 0$.
   (d) Comme T_n est pair ou impair, pour $u < -1$, $|T_n(u)| = |T_n(-u)| > 1$ puisque $-u > 1$. Ainsi pour tout $u \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, on a $|T_n(u)| > 1$.
5. (a) On a si $x \in [0,\pi]$, $\cos x \in [-1,1]$,
   $$T_n(\cos x) = 0 \iff \cos(nx) = 0 \iff nx = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$
   soit encore
   $$x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\ k \in \mathbb{Z}$$
   avec la condition $x \in [0,\pi]$ soit
   $$0 \leqslant \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leqslant \pi$$
   c'est à dire
   $$0 \leqslant \frac{1+2k}{2n} \leqslant 1$$
   soit encore $1 \leqslant 1 + 2k \leqslant 2n$ c'est à dire $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Ainsi
   $$T_n(\cos x) = 0\,,\ x \in [0,\pi] \iff x = \frac{1+2k}{2n}\pi\,,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

(b) Comme T_n est de degré n, il admet au plus n racines distinctes. Or les valeurs

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

sont n racines de T_n (d'après la question précédente) et distinctes puisque la fonction cosinus est injective sur $[0,\pi]$, et dans $[-1,1]$. Ainsi T_n à n racines distinctes, dans $[-1,1]$.

(c) On en déduit vu le coefficient dominant de T_n que si $n \geqslant 1$,

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right)$$

Partie II

1. L'application est bien définie puisque si P et Q sont deux polynômes, $x \mapsto P(\cos(x)Q(\cos(x)$ est continue sur $[0,\pi]$.
La symétrie est évidente par définition. On vérifie alors la linéarité selon la première variable, ce qui justifie alors la bilinéarité : soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}[X]$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q|R) &= \int_0^\pi (\lambda P(\cos(x)) + \mu Q(\cos(x)))R(\cos(x))\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi (\lambda P(\cos(x)R(\cos(x) + \mu Q(\cos(x))R(\cos(x))\mathrm{d}x \\ &= \lambda\int_0^\pi P(\cos(x)R(\cos(x))\mathrm{d}x + \mu\int_0^\pi Q(\cos(x))R(\cos(x))\mathrm{d}x \\ &= \lambda(P|R) + \mu(Q|R)\end{aligned}$$

Nous avons le caractère positif puisque si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$(P|P) = \int_0^\pi P^2(\cos(x))\mathrm{d}x \geqslant 0$$

sachant que $f_P : x \mapsto P^2(\cos(x))$ positive ; de plus par continuité et positivité de cette même fonction sur $[0,\pi]$, si $(P|P) = 0$, on obtient par théorème que $f_P = 0$ sur $[0,\pi]$, soit $P(\cos(x)) = 0$ sur $[0,\pi]$, ce qui entraîne que P s'annule sur $[-1,1]$, donc admet une infinité de racines et donc est nul. Ainsi nous avons aussi le caractère défini positif.
Donc nous avons bien un produit scalaire.

2. (a) Soit p et q deux entiers naturels distincts, on a $p+q>0$ et $p-q \neq 0$ et ainsi

$$\begin{aligned}(T_p|T_q) &= \int_0^\pi T_p(\cos(x))T_q(\cos(x))\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos((p+q)x) + \cos((p-q)x))\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\frac{\sin((p+q)x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)x)}{p-q}\right]\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

(b) On a

$$(T_0|T_0) = \int_0^\pi \mathrm{d}x = \pi$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(T_n|T_n) = \int_0^\pi T_n^2(\cos x))\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(nx)^2\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2nx)}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

(c) Soit $n \geqslant 1$, $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, comme $(T_0, \dots, T_{n-1})$ est une famille bien échelonnée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, elle en est donc une base, on écrit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k T_k$ et ainsi

$$(T_n|P) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (T_n|T_k) = 0$$

ce qui montre que T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(d) Comme $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on écrit

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k$$

avec en particulier $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ pour respecter le coefficient dominant. Ainsi

$$(T_n|X^n) = \frac{1}{2^n}(T_n|T_n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (T_k|T_n) = \frac{\pi}{2^n}$$

3. On sait déjà que $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, les polynômes $T_0, \dots, T_n$ sont deux à deux orthognaux. Donc $(T_0, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $(\,|\,)$. En normalisant les polynômes, on obtient que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n \right)$$

est une base orthonormée de $(\mathbb{R}_n[X], (\,|\,))$.

4. Il suffit d'effectuer le changement de variable $t = \cos(x)$, de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant, avec $\mathrm{d}t = \sin(x)\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sin(x)} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.