

Devoir n°6

Autour de la transformée de Fourier

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $\hat{f}$ dite transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t\nu} f(t) dt$$

La variable t joue le rôle du temps, ν la fréquence.

1. Montrer que la transformée de fourrier $\hat{f}$ d'une fonction f continue par morceaux et intégrable est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer aussi que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que f admet un moment d'ordre p , c'est à dire que $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, avec $p \geq 1$.
 - (a) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |t^{p-1}| \leq |t|^p + 1$$

- (b) En déduire que f admet un moment d'ordre $p-1$ puis que f admet des moments aux ordres $1, 2, \dots, p$.

- (c) Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et exprimer $(\hat{f})^{(i)}$ pour $0 \leq i \leq p$.

4. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, paire (respectivement impaire). Que peut-on dire de $\hat{f}$?
5. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, a un réel. Montrer que $f_a : t \mapsto f(a+t)$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{f}_a(\nu) = e^{2i\pi a\nu} \hat{f}(\nu).$$

6. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable sur $\mathbb{R}$, de limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que l'on peut définir $\widehat{f'}$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \widehat{(f')}(\nu) = 2i\pi\nu \hat{f}(\nu).$$

7. Soit $\nu_0 \in \mathbb{R}^+$, on considère la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{2i\pi\nu_0 t} & \text{si } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction complexe f représente un paquet d'onde sinusoïdale (durée finie) L'analyse de Fourier classique des fonctions périodiques ne peut-être utilisée ici. La transformée de Fourier

va permettre d'analyser le spectre d'un tel signal. Pour cet exemple, la fréquence qui doit être mise en évidence est ν_0 . Montrer que

$$\widehat{f}(\nu) = \tau \operatorname{sinc}(\pi\tau(\nu - \nu_0))$$

où sinc représente la fonction sinus cardinale, prolongement continue de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Représenter la fonction $\widehat{f}$. Quelle fréquence est mise en évidence ?

8. Étudier de même la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter la fonction $\widehat{f}$. Quelle est la fréquence mise en évidence ?

9. On pose F définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} e^{-t^2} dt$$

transformée de Fourier de la fonction de Gauss $t \mapsto e^{-t^2}$.

- (a) Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On admettra pour la suite que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

- (b) Montrer que la fonction F définie une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
(c) Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2i\pi xt} e^{-t^2} dt$$

- (d) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que l'on justifiera soigneusement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2\pi^2 x F(x)$$

On rappelle que les solutions de l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = 0$$

où a est une fonction continue sur un intervalle I sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$$

où A désigne une primitive de a sur I et λ un scalaire.

- (e) Déterminer $F(x)$ pour tout x réel. Conclusion ?



Devoir n°6 : correction

1. Soit $\nu \in \mathbb{R}$, nous avons pour tout t réel,

$$|e^{-2i\pi t\nu} f(t)| \leq |f(t)|$$

Ainsi puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$t \mapsto e^{-2i\pi \nu t} f(t)$$

l'est aussi et ainsi on peut définir $\hat{f}(\nu)$.

La fonction $\hat{f}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. On pose

$$g(\nu, t) = e^{-2i\pi \nu t} f(t)$$

sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- Pour tout ν , $t \mapsto g(\nu, t)$ est continue par morceaux
- Pour tout t réel, $\nu \mapsto g(\nu, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- Pour tout t réel, ν réel, on a

$$|e^{-2i\pi t\nu} f(t)| \leq |f(t)| = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.

Ainsi d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Si $|t| \geq 1$, on a

$$|t|^{p-1} \leq |t|^p \leq |t|^p + 1$$

Si $|t| \leq 1$, on a

$$|t|^{p-1} \leq 1 \leq |t|^p + 1$$

- (b) On a alors

$$|t^{p-1} f(t)| \leq |t^p f(t)| + |f(t)|$$

et ainsi comme f est intégrable et admet un moment d'ordre p , on a $t \mapsto t^{p-1} f(t)$ intégrable par comparaison et ainsi f admet un moment d'ordre $p-1$.

Par récurrence descendante, on en déduit alors que f admet des moments aux ordres $p, p-1, p-2, \dots, 2, 1$.

- (c) Vérifions les hypothèses du théorème de classe $\mathcal{C}^p$ pour les intégrales à paramètre.

- Pour tout ν de $\mathbb{R}$, $t \mapsto g(\nu, t)$ est continue par morceaux et intégrable.
- Pour tout t de $\mathbb{R}$, $\nu \mapsto g(\nu, t)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et on a pour tout j entre 1 et p :

$$\frac{\partial^j g}{\partial \nu^j}(\nu, t) = (-2i\pi t)^j e^{-2i\pi \nu t} f(t)$$

- Pour tout ν de $\mathbb{R}$, pour tout j entre 1 et p , $t \mapsto \frac{\partial^j g}{\partial \nu^j}(\nu, t)$ est continue par morceaux.
- Pour tout ν de $\mathbb{R}$, pour tout j entre 1 et p , on a

$$\left| \frac{\partial^j g}{\partial \nu^j}(\nu, t) \right| = |t^j f(t)| = \varphi_j(t)$$

avec φ_j continue par morceaux et intégrable d'après la question précédente.

Ainsi la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et on a pour tout j entre 0 et p

$$\widehat{f}^{(j)}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi t)^j e^{-2i\pi\nu t} f(t) dt$$

4. Soit $\nu \in \mathbb{R}$, on a en effectuant le changement de variable $s = -t$, de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif décroissant (les intégrales convergent donc) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, $ds = -dt$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(-\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi(-\nu)t} f(t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu s} f(-s) (-ds) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu s} f(-s) ds \end{aligned}$$

Si f paire, on a donc $\widehat{f}(-\nu) = \widehat{f}(\nu)$ et donc $\widehat{f}$ paire.

Si f impaire, on a donc $\widehat{f}(-\nu) = -\widehat{f}(\nu)$ et donc $\widehat{f}$ impaire.

5. La fonction f_a est continue par morceaux. Le changement de variable $s = a + t$, donne vu la convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)| ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(a + t)| dt$$

et ainsi f_a est intégrable sur $\mathbb{R}$. On a avec le même changement de variable

$$\begin{aligned} \widehat{f}_a(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu t} f_a(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu t} f(a + t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu(s-a)} f(s) ds \\ &= e^{2i\pi\nu a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu s} f(s) ds \\ &= e^{2i\pi\nu a} \widehat{f}(\nu). \end{aligned}$$

6. Soit $\nu \in \mathbb{R}$, on envisage l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu t} f'(t) dt$$

En posant $g(t) = e^{-2i\pi\nu t}$, f et g de classe $\mathcal{C}^1$,

$$f(t)g(t) = e^{-2i\pi\nu t} f(t)$$

qui admet comme limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ (exponentielle imaginaire de module 1), par intégration par partie généralisée, l'intégrale est de même nature que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi\nu e^{-2i\pi\nu t} f(t) dt = -2i\pi\nu \widehat{f}(\nu)$$

convergente donc, et on a

$$\widehat{f}'(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\mu t} f'(t) dt = 2i\pi\mu \widehat{f}(\mu)$$

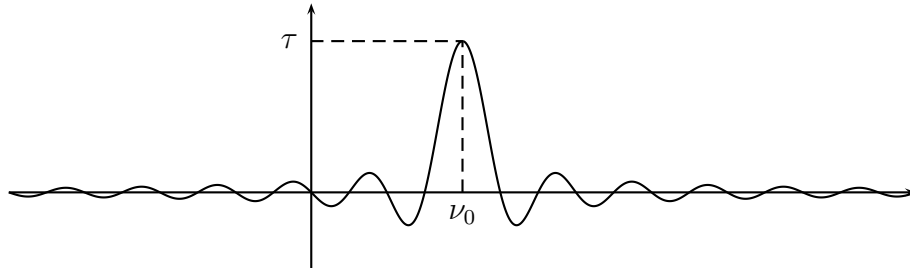
7. Soit $\nu_0 \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu t} f(t) dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2i\pi\nu t} e^{2i\pi\nu_0 t} dt \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} dt\end{aligned}$$

Pour $\nu = \nu_0$, on obtient $\hat{f}(\nu_0) = \tau$, et pour $\nu \neq \nu_0$,

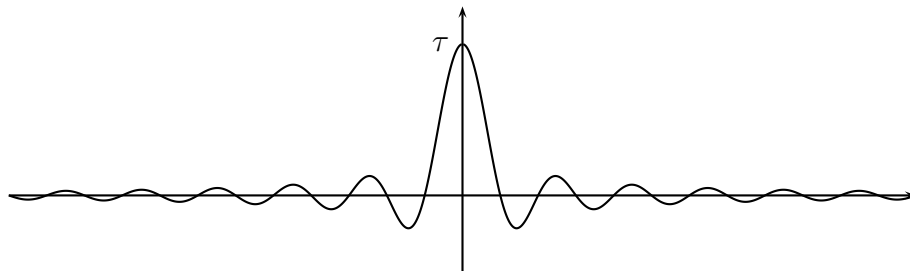
$$\begin{aligned}\hat{f}(\nu) &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} dt = \left[\frac{1}{2i\pi(\nu_0 - \nu)} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{1}{2i\pi(\nu_0 - \nu)} [e^{i\pi(\nu_0 - \nu)\tau} - e^{-i\pi(\nu_0 - \nu)\tau}] \\ &= \frac{\sin(\pi(\nu_0 - \nu)\tau)}{\pi(\nu_0 - \nu)} = \frac{\sin(\pi(\nu - \nu_0)\tau)}{\pi(\nu - \nu_0)} \\ &= \tau \operatorname{sinc}(\pi\tau(\nu - \nu_0))\end{aligned}$$

Connaissant le graphe de la fonction sinus cardinal, on en déduit le graphe de $\hat{f}$: recentrage en ν_0 (translation selon l'axe des abscisses) et homothétie de τ selon les ordonnées :



ce qui met en évidence la fréquence ν_0 .

8. On applique la question précédente avec $\nu_0 = 0$.



ce qui met en évidence la fréquence 0, ce qui paraît logique pour un signal constant, même constant uniquement sur une durée donnée.

9. (a) La fonction de Gauss $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a

$$2e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad e^{-t^2} = o_{\pm\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

ce qui assure l'intégrabilité en $\pm\infty$. Ainsi la fonction de Gauss est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Ainsi, par la question Q1, F est bien définie sur $\mathbb{R}$, et par la question Q2, elle est continue sur $\mathbb{R}$. C'est la transformée de Fourier de la fonction de Gauss.

- (c) La fonction $t \mapsto te^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (même méthode que pour $t \mapsto e^{-t^2}$), et ainsi par la question Q3, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$F'(x) = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2i\pi xt} e^{-t^2} dt.$$

par dérivation sous le signe intégral licite.

- (d) On procède par intégration par parties, en remarquant que $(e^{-t^2})' = -2te^{-t^2}$: on pose $f'(t) = -2te^{-t^2}$, $f(t) = e^{-t^2}$, $g(t) = e^{-2i\pi xt}$, $g'(t) = -2i\pi xe^{-2i\pi xt}$, avec

$$f(t)g(t) = -2i\pi xe^{-2i\pi xt} e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$$

et ainsi (convergence de l'intégrale initiale)

$$F'(x) = i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} (-2t) e^{-t^2} dt = -(i\pi)(-2i\pi x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} e^{-t^2} dt = -2\pi^2 x F(x)$$

- (e) On pose $a(x) = 2\pi^2 x$, $A(x) = \pi^2 x^2$, et donc

$$F(x) = F(0)e^{-A(x)} = F(0)e^{-\pi^2 x^2}$$

et comme $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ on obtient finalement que

$$F(x) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2}$$

et ainsi F est aussi une fonction de type Gaussienne réelle : la transformée de Fourier d'une Gaussienne est une Gaussienne.