Devoir surveillé n°8
3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Exercice

Soit u un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) d'un espace euclidien $E, (\ |\ )$ avec $n = \dim E$.

1. (*) Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u. On notera λ_i la valeur propre associée à e_i, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2. Soit $x \in E$, on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$, i.e. $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

   (a) (*) Calculer $u(x)$ et en déduire que
   $$(u(x)|x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$
   (**on n'utilisera pas de calcul matriciel**)

   (b) (*) On suppose désormais que u est défini positif. Que peut-on dire de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$? Montrer que u est inversible et que
   $$(u^{-1}(x)|x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} x_i^2$$

3. (**) Montrer que
   $$f(x) = (u(x)|x).(u^{-1}(x)|x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$
   On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz canonique de $\mathbb{R}^n$ appliquée à deux vecteurs bien choisi.

4. On note $\mathcal{S}$ la sphère unité de E, c'est à dire
   $$\mathcal{S} = \{x \in E\ ,\ \| x \| = 1\}$$
   (*) Montrer que
   $$\inf_{x \in \mathcal{S}} (u(x)|x).(u^{-1}(x)|x) = 1.$$

5. (*) Vérifier que si x_0 est un vecteur propre unitaire, alors $f(x_0) = 1$.
6. (***) Soit $x \in \mathcal{S}$ tel que $f(x) = 1$. Montrer que x est un vecteur propre de u (unitaire).
7. (*) En supposant que $n = 3$, que u admet deux valeurs propres distinctes λ et μ, de multiplicité 1 et 2. Donner une représentation graphique cohérente par rapport aux résultats précédents de $\mathcal{S}$, E_λ et E_μ.

Polynôme de Laguerre [1] et quadrature de Gauss

Pour la suite, n désigne un entier de $\mathbb{N}^*$.

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Partie I : produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

1. (**) Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.
2. (*) Montrer que l'application $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}_n[X]^2 \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire. Que peut-on dire de $(\mathbb{R}_n[X], (\cdot|\cdot))$?
3. (*) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, à l'aide d'une intégration par parties, établir rigoureusement que

$$\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = k \int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

4. (*) Conclure que $(X^k|1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.
   Que vaut $(X^i|X^j)$ lorsque $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$?

Partie II : construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\,,\ \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

5. (*) Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. (*) Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
7. (*) En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k | k \in [\![0, n]\!]\}$.

Vecteurs propres de l'application α.

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8. (*) Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\alpha + k\mathrm{id})$?
9. (*) En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ de coefficient dominant égal à 1 vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. (**) Justifier que P_k est de degré k.
11. (*) Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

On fixe un couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. les polynômes de Laguerre apparaissent en mécanique quantique dans la partie radiale de la solution de l'équation de Schrödinger pour un atome à un électron

12. (*) Montrer que $(\alpha(P)|Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
13. (*) En déduire que $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$. Que peut-on dire de α ?
14. (Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser la question précédente.
15. Est-ce que (P_0, P_1, P_2) est l'orthogonalisation par Gramm-Schmidt de $(1, X, X^2)$?

Partie III : racines de P_n

16. (****) On suppose $n \geqslant 1$. On note $x_1, \ldots, x_k$ les racines de P_n de multiplicité impaire, c'est à dire les racines où P_n change de signe. On a $0 \leqslant k \leqslant n$.
    (a) (*) On pose $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - x_k)$ (et $Q = 1$ si $k = 0$). Que peut-on dire de la multiplicité des racines de P_nQ ? En déduire que $f : t \mapsto P_n(t)Q(t)$ est de signe constant.
    (b) (*) On suppose que $k < n$. Montrer que $(P_n|Q) = 0$.
    (c) (*) En déduire que f est nulle sur $[0, +\infty[$.
    (d) (*) Montrer que $k = n$ et en déduire que P_n est scindé à racines simples. Préciser les racines de P_2.

Partie IV : Méthode de quadrature de Gauss

On note $x_1, \ldots, x_n$ les racines distinctes de P_n. ON souhaite démontrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\,, \int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

17. (*) Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

18. (*) En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.
19. (**) Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ de sorte que

$$\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

20. (**) Pour $n = 2$, déterminer (λ_1, λ_2) vérifiant $(*)$.

Exercice

1. Comme u est un endormorphisme autoadjoint de E de dimension finie, d'après le théorème spectral, u est diagonalisable à l'aide d'une base orthonormée, et donc il existe bien une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres.

2. Soit $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

   (a) Par linéarité de u, on a

   $$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$$

   Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée, nous avons alors d'après l'expression d'un produit scalaire dans une base orthonormée

   $$(u(x)|x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

   (b) Si u est défini positif, on a alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ et ainsi les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont strictement positives.
   Ainsi 0 n'est pas valeur propre de u, et donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, ce qui implique que u est injective, donc (dimension finie) inversible. Alors l'inversion de $u(e_i) = \lambda_i e_i$ donne $u^{-1}(e_i) = \frac{1}{\lambda_i} e_i$ et ainsi pour x,

   $$u^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u^{-1}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} 1 \lambda_i x_i e_i$$

   puis

   $$(u^{-1}(x)|x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} x_i^2.$$

3. Nous avons

   $$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \lambda_i x_i e_i\right) = \| a \|_2^2 \| b \|_2^2$$

   avec $a = \left(\sqrt{\lambda_i} x_i)\right)$ et $b = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} x_i\right)$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$,

   $$f(x) \geqslant < a, b > = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} x_i \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

4. Si de plus $x \in \mathcal{S}$, $\| x \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ et ainsi on a $f(x) \geqslant 1$.
   De plus, en choisissant $x = e_1$, nous avons

   $$f(x) = (u(e_1)|e_1).(u^{-1}(e_1)|e_1) = \lambda_1 (e_1|e_1).\frac{1}{\lambda_1}(e_1|e_1) = 1.$$

   Ainsi on obtient donc

   $$\inf_{x \in \mathcal{S}} (u(x)|x).(u^{-1}(x)|x) = 1.$$

5. Cela a été fait ci-dessus avec le vecteur e_1, mais peut se généraliser pour n'importe quel vecteur propre unitaire.
6. Réciproquement, soit $x \in \mathcal{S}$ de sorte que $f(x) = 1$. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessus doit être une égalité, ce qui signifie que les vecteurs a et b doivent être colinaire, soit les conditions par exemple

$$\forall i_i n\{1, \dots, n\}\,,\ \sqrt{\lambda_i} x_i = \alpha \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} x_i$$

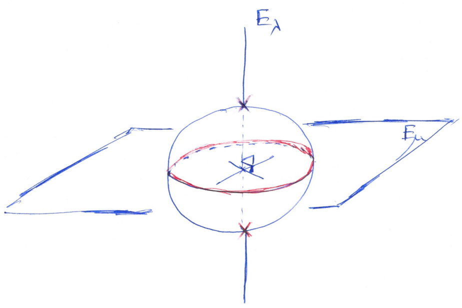
avec α un coefficient de proportionnalité, soit encore

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}\,,\ \lambda_i x_i = \alpha x_i$$

Le vecteur x ne peut pas être nul (on a $f(0) = 0$), et pour toutes les coordonnées x_i non nulles, nous obtenons $\lambda_i = \alpha$. Ainsi

$$f(x) = f\left(\sum_{\substack{i=1\\x_i\neq 0}}^{n} x_i e_i\right) = f\left(\sum_{\substack{i=1\\x_i\neq 0}}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{\substack{i=1\\x_i\neq 0}}^{n} x_i f(e_i) = \alpha \sum_{\substack{i=1\\x_i\neq 0}}^{n} x_i e_i = \alpha x$$

et donc x est un vecteur propre (unitaire). Finalement, en combinant avec la question 5, on en déduit que le minimum de f sur $\mathcal{S}$ est atteint pour les vecteurs propres unitaires de u.
7. On représente le plan E_μ, la droite E_λ orthogonale à E_μ, et l'intersection avec $\mathcal{S}$ (réunion de 2 points sur la droite, et d'un cercle dans le plan).



Problème

Q1 Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, PQ est un polynôme de degré au plus $2n$, combinaison linéaire de $(1, \dots, X^{2n})$. Ainsi la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est une combinaison linéaire des fonctions

$$f_k : t \mapsto t^k \mathrm{e}^{-t}$$

avec $k = 0, \dots, 2n$. Or les fonctions f_k sont toutes continues sur $[0, +\infty[$, et comme

$$t^2 f_k(t) = t^{k+1}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

nous avons

$$f_k(t) = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et ainsi la fonction f_k est intégrable sur $[1, +\infty[$ par comparaison à une intégrale de Riemann convergente. Ainsi comme f_k est aussi intégrable sur $[0, 1]$ (fonction continue sur une segment), on en déduit que f_k est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Donc $t\mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ aussi par combinaison linéaire. On en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

est absolument convergente, donc convergente.

Q2 D'après la question Q1, on peut donc définir l'applicaton $(\cdot|\cdot)$ de $\mathbb{R}_n[X]^2$ dans $\mathbb{R}$.
La symétrie est évidente.
Pour la bilinéarité, pour tout P,Q,R de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ,μ de $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda P+\mu Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t)+\mu Q(t))R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}+\mu Q(t)R(t)\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t\\ &= \lambda\int_0^{+\infty} P(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\mu\int_0^{+\infty} Q(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \qquad \text{(linéarité de l'intégrale généralis}\\ &= \lambda(P|R)+\mu(Q|R)\end{aligned}$$

d'où la linéarité selon la première variable, et la bilinéarité par la symétrie.
Si $P\in\mathbb{R}_n[X]$,

$$(P|P)=\int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale puisque $t\mapsto P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction positive ; de plus si $(P|P)=0$, alors comme $t\mapsto P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction continue et positive, par théorème, on a cette fonction nulle sur $[0,+\infty[$ et ainsi (l'exponentielle ne s'annule pas) on obtient que P nulle sur $[0,+\infty[$. Nous avons donc un polynôme P admettant une infinité de racines, il est donc nul.

On a donc montré que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire. Ainsi nous avons un espace euclidien $()\mathbb{R}_n[X],(\cdot|\cdot))$ (dimension finie $n+1$).

Q3 Soit $k\in\{1,\ldots,n\}$, on effectue une intégration par parties généralisée avec

$$\begin{cases} u(t)=t^k & u'(t)=t^{k-1}\\ v(t)=-\mathrm{e}^{-t} & v'(t)=\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$$

Comme

$$[u(t)v(t)]_a^b=-b^k\mathrm{e}^{-b}+a^k\mathrm{e}^{-a}$$

admet comme 0 limite lorque a et b tendent vers 0 et $+\infty$, les deux intégrales suivantes sont égales (car convergentent puisqu'il s'agit de $(1|X^k)$ et $(1|kX^{k-1})$:

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

soit encore

$$\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} kt^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

soit encore donc $(1|X^k)=k(1|X^{k-1})$.

On peut aussi effectuer l'intégration par partie sur le segment $[0, a]$ puis passer à la limite lorsque a tend vers $+\infty$, sachant que les intégrales généralisées en jeux sont convergentes par la question Q1.

Q4 On procède par récurrence (à faire, c'est la question) sur k, $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Pour $k = 0$, on a (cours)

$$(X^0|1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1 = 0!$$

Si on suppose que $(X^k|1) = k!$ pour un certain k de $\{0, \ldots, n-1\}$, alors d'après la question précédente, et l'hypothèse de récurrence

$$(X^{k+1}|1) = (k+1)(X^k|1) = (k+1)k! = (k+1)!$$

ce qui achève la récurrence.

Donc pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, on a $(X^k|1) = k!$.

Nous avons alors $(X^i|X^j) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i t^j \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{i+j}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = (X^{i+j}|1) = (i+j)!$.

Q5 On procède par la définition. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, on vérifie que

$$\alpha(P) = XP'' + (1-X)P' \in \mathbb{R}_n[X]$$

On a $\deg(XP'') \leqslant n-1$ et $\deg(1-X)P' \leqslant n$ et ainsi $\deg \alpha(P) \leqslant n$. Ainsi α définit bien une application de $\mathbb{R}_[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit P, Q deux polynômes, λ et μ deux réels, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha(\lambda P + \mu Q) &= X(\lambda P + \mu Q)'' + (1-X)(\lambda P + \mu Q)' \\
&= \lambda(XP'' + (1-X)P' + \mu(XQ'' + (1-X)Q') \\
&= \lambda\alpha(P) + \mu\alpha(Q)
\end{aligned}$$

et ainsi α est linéaire et c'est donc bien finalement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

À l'oral, on peut aussi invoquer plus facilement la linéarité des opérations en jeux pour définir α (somme, produit par un polynôme constant, dérivation une ou deux fois), mais il faut pouvoir bien l'expliquer.

Q6 Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a

$$\alpha(X^k) = Xk(k-1)X^{k-2} + (1-X)kX^{k-1}$$

(formule vraie aussi si $k = 0$ et $k = 1$ par annulation) soit

$$\alpha(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1}$$

On en déduit alors la matrice de α dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$

$$M = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & n^2 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -n
\end{pmatrix}$$

Q7 La matrice M est triangulaire, ce qui permet d'en déduire facilement sont polynôme caractéristique

$$\chi_M(\lambda) = \prod_{i=0}^{n} (\lambda + i)$$

On en déduit alors le spectre de M

$$^{(}M) = \{-n, -n+1, \ldots, -1, 0\}$$

Ainsi M admet $n+1$ valeurs propres disctinctes, $n+1$ étant la dimension de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi α est diagonalisable.

Q8 Comme M admet $n+1$ valeurs propres disctinctes, $n+1$ étant la dimension de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, α est diagonalisable et admet donc $n+1$ espaces propres qui sont tous des droites vectorielles. Ainsi comme l'espace propre de α associée à la valeur propre $-k$ est $\operatorname{Ker}(\alpha - (-k\mathrm{id}) = \operatorname{Ker}(\alpha + k\mathrm{id})$, cet espace est de dimension 1.

Q9 Comme l'espace propre $\operatorname{Ker}(\alpha + k\mathrm{id})$ associé à la valeurs propre $-k$ est une droite vectorielle, elle est engendrée par un polynôme Q_k, non nul, de $\mathbb{R}_n[X]$ de coefficient dominant a_k. On pose $P_k = \frac{1}{a_k} Q_k$ qui vérifie donc déjà P_k unitaire et $\alpha(P_k) = -kP_k$.
Si $\tilde{P}_k$ était un autre polynôme solution, il serait unitaire et proportionnel à P_k, donc égal. Ainsi il existe bien un unique polynôme P_k unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q10 On a

$$\alpha(P_k) = -kP_k = XP_k'' + (1-X)P_k'$$

On regarde le terme dominant (de plus haut degré) : si celui de P_k est a_pX^p, alors celui de $-kP_k$ est $-a_pX^p$ et celui de $XP_k'' + (1-X)P_k'$ provient uniquement pour des raison de degré de $-XP_k'$ et ainsi on a

$$-ka_p = -pa_p$$

ce qui conduit à $p = k$. Ainsi P_k est de degré k.

Q11 On utilise le fait que P_k existe et est unique avec la condition unitaire et sachant donc que $_d egP_k = k$.
Pour $k = 0$, forcément $P_0 = 1$ pour être à la fois unitaire et de dégré 0.
Pour $k = 1$, P_1 est de la forme $P_1 = X + a$.
On a $\alpha(P_1) = (1 - X) = -P_1$ soit $a = -1$. Ainsi $P_1 = X - 1$.

Pour $X^2 - 4X + 2$, il est unitaire et

$$\alpha(X^2 - 4X + 2) = X.2 + (1 - X)(2X - 4) = 2X + 2X - 4 - 2X^2 + 4x = -2(X^2 - 4X + 2)$$

et ainsi par unicité, $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

Q12 On a

$$(\alpha P|Q) = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

On pense à une intégration par partie, ce qui nous conduit à poser (v en premier)

$$\begin{cases} u(t) = tP'(t)\mathrm{e}^{-t} & u'(t) = (tP''(t) + (1-t)P'(t))\mathrm{e}^{-t} \\ v(t) = Q(t) & v'(t) = Q'(t) \end{cases}$$

avec u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et

$$u(t)v(t) = tP'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$$

qui admet 0 comme limite en $+\infty$ et vaut 0 en 0 ; ainsi on a(on sait déjà que les integrales sont convergentes)

$$\int_0^{+\infty}(tP''(t)+(1-t)P'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}t$$

Q13 On applique la question précédente en inversant les rôles de P et Q :

$$(\alpha(Q)|P) = -\int_0^{+\infty} tQ't)P'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

et ainsi par symétrie du produit scalaire

$$(\alpha(P)|Q) = (\alpha(Q)|P) = (P|\alpha(Q))$$

On en déduit que l'endomorphisme α est autoadjoint ou symétrique.

Q14 On sait d'après la question Q10 que $(P_0,\dots,P_n)$ est une famille de polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ de dégrés échelonnés. Ainsi on a déjà une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit i et j distincts de $\{0,\dots,n\}$, on a

$$(\alpha(P_i)|P_j) = (P_i|\alpha(P_j))$$

et ainsi comme $\alpha(P_i) = -iP_i$ et $\alpha(P_j) = -jP_j$,

$$-i(P_i|P_j) = -j(P_i|P_j)$$

soit $(j-i)(P_i|P_j) = 0$ et donc $(P_i|P_j) = 0$.

On en déduit que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q15 On orthogonalise $(1,X,X^2)$: $U_0 = 1 = P_0$, $(1|1) = 1$, puis $U_1 = X-(X|1)1 = X-1 = P_1$, $(X-1|X-1) = (X|X)-2(X|1)+1 = 1$ puis

$$U_2 = X^2-\frac{(X^2|1)}{(1|1)^2}1-\frac{(X^2|X-1)}{(X-1|X-1)}(X-1) = X^2-2-\frac{6-2}{1}(X-1) = X^2-2+4(X-1) = X^2-4X+2 =$$

mais par contre

$$\| P_2 \|^2 = (X^2-4X+2|X^2-4X+2) = (X^2|X^2)+16(X|X)+4(1|1)-8(X^2|X)+8(X^2|1)-16(X|1) = 24-$$

Ainsi (P_0,P_1,P_2) est tout de même l'orthogonalisation de $(1,X,X^2)$ par le procédé de Schmidt.

Q16 Les racines de PQ sont alors toutes de multiplicité paire. Ainsi f est de signe constant qur $[0,+\infty[$. Si on suppose que $k<n$, alors $(P_n|Q) = 0$ puisque $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[x] = \mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_{n-1})$ et que P_n orthogonal à P_0, ..., P_{n-1}.
On a alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P_n(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 0$, et comme $t\mapsto P_n(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ continue de signe contant, elle doit être nulle sur $[0,+\infty[$, et ainsi P_nQ aussi, admet donc une infinité de racines, donc est nul, ce qui est contradictoite.
Ainsi $k\geqslant n$, c'est à dire $k=n$ et donc P_n admet n racines de multiplicités impaires, dont P_n de degré n est scindé à racines simples.

Pour $n=2$, $82 = X^2-4X+2 = (X-2)^2-2 = (X-2+\sqrt{2})(X-2-\sqrt{2})$ de racines $2-\sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2}$.

Q17 Soit un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on considère les deux applications linéaire (facile) f et g de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(P) = \int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \qquad g(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

On sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images d'une base, ainsi $(*)$ est vérifiée si et seulement si f et g sont égales si et seulement si elles sont égales pour les vecteurs de la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ si et seulement si

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}\ f(X^k) = g(X^k)$$

soit encore d'après la question Q4

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}\ \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k = k!$$

soit matriiellement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \cdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

Q18 La matrice est une matrice de Vandermonde, inversible puisque $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts. Ainsi il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vérifiant (*).

Q19 Il faut réfléchir ici ! On sait bien calculer le terme de gauche par la question Q4, en déomposant. Par contre à droite ...
On se débrouille pour avoir à droite 0, et à gauche un nombre strictement positif. D'où, on pose

$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$$

Ainsi le terme de droite est nul, et le terme de gauche, sans calcul, puisque P n'est pas nul sur $[0, +\infty[$, continu, mais positif, est strictement positif. Ainsi ce polynôme convient. Les carrés permettent d'avoir un polynôme positif, les racines x_1,...,x_n permettent d'avoir 0 pour le terme de droite.

Q20 Pour $n = 2$, $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{2}$. On a

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ 2(\lambda_1 + \lambda_2) + \sqrt{2}(\lambda_2 - \lambda_1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

On vérifie $(*)$: soit $P = aX + b$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} (at + b)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = a1! + b0! = a + b$ et $\lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x_2)$ qui vaut

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[a(2 - \sqrt{2}) + b] + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[a(2 + \sqrt{2}) + b] = a + b$$