I PC CCP énoncés

Exercice 1.

I) Montrer que $(A|B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$ munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
Montrer que toute matrice symétrique est orthogonale à toute matrice antisymétrique puis que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
En déduire que $A^T A = A^2 \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour $n \geqslant 3$, il existe A non symétrique et telle que $A^T A = A^2$ (on les cherchera sous la forme VU^T avec U et V dans $\mathbb{C}^n$).
On choisit $n = 2$; montrer que toutes les solutions à coefficients complexes de $A^T A = A^2$ sont symétriques.
II) Soit $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\mathrm{d}x$; quelle est la nature de I_1 ? Celle de I_n ? Calculer I_n.

Exercice 2.

I) Montrer que Φ, qui à P associe $Q(X) = (X+2)P(X) - XP(X+1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, calculer $P(0)$ et $P(-1)$.
Montrer que $\exists R \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = X(X+1)R(X)$ et $R(X) = R(X+1)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $R(k) - R(0)$ et en déduire que R est une constante.
Trouver $\mathrm{Ker}\,\Phi$ et $\mathrm{Im}\,\Phi$ (on pourra utiliser la matrice de Φ dans la base canonique).
Déterminer le spectre de Φ ; est-il diagonalisable ?

II) Calculer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.
Calculer $I_n + I_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)}{n+1}$;

Exercice 3.

I) On donne

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

de taille n. Montrer que si $n \geqslant 2$, $D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$. Calculer D_n en fonction de n.

II) Donner les variations de $\Phi(x) = -x \ln x$ sur $]0,1[$ et montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on pose $p_n = P(X = n) \neq 0$.
Lorsque $\sum \Phi(p_n)$ converge, on dit que X admet une entropie $H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi(p_n)$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$ et en déduire que $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant -\sqrt{p_n} \ln p_n \leqslant 1$.
Montrer que si X suit une loi géométrique, elle admet une entropie et la calculer.
Dans le cas général, on suppose que X admet une espérance ; montrer, à l'aide de l'inégalité établie que $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geqslant n_0$, $\Phi(p_n) \leqslant \max\left\{\frac{1}{n^{3/2}}, 3p_n \ln n\right\}$.
Montrer que X admet une entropie.

Exercice 4.

I) Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on pose $I(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$.
Pour $0 \leqslant k \leqslant 5$, $I(X^k)$ est-elle absolument convergente ? $I(P)$ converge-t-elle ?
On admet que $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tel que $I(P) = aP\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + bP(0) + cP\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Calculer $I(X)$ et en déduire une relation entre a, b et c.
On donne $I(X^2) = \frac{\pi}{2}$; donner les valeurs de a, b et c.
Donner une relation de récurrence entre $I(X^{k+1})$ et $I(X^k)$ puis conclure.
II) La matrice $B = A^T A$ avec $A \in \mathcal{M}_{5,10}(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?
Admet-elle 0 pour valeur propre ?

Exercice 5.

I) On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que Φ, définie par $\Phi(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$ est linéaire, déterminer son rang et montrer que $(\operatorname{Ker}\Phi)^{\perp} = \mathbb{R}_0[X]$.
Montrer que f_n défini par $f_n(P)(X) = P(X) + 2a\Phi(P)X$ est un endomorphisme dont on donnera la matrice dans la base canonique si $n = 3$.
Est-il diagonalisable ? Bijectif ?
Donner les valeurs propres de g_a défini par $g_a(P) = P + 2a\Phi(P)$.
Est-il diagonalisable ? Bijectif ?

II) Étudier la série de fonctions $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.

Exercice 6.

I) Montrer que l'ensemble des suites complexes (u_n) vérifiant

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_n$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Montrer que $P(X) = X^3 - X^2 - 1$ admet une unique racine réelle et des racines complexes conjuguées.
Montrer que $\phi(u) = (u_0, u_1, u_2)$ définit un isomorphisme de V sur $\mathbb{C}^3$ et en déduire la dimension de V.
Trouver les suites géométriques de V et en déduire une base de V.

II) Résoudre $y'' - y + \mathrm{e}^{-x} = 0$ puis déterminer $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telles que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 7.

I) On dispose de deux urnes U_1 et U_2, pouvant être vides, et de deux jetons. On choisit aléatoirement l'une des deux urnes ; si elle est vide, on passe à l'autre, on tire un jeton, puis on replace le jeton aléatoirement dans l'une des deux. On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de jetons dans U_1 au bout du n-ième tirage.

On note $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} P(X_0=0) \\ P(X_0=1) \\ P(X_0=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, avec $p+q+r=1$, et

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Donner une base du noyau de A et en déduire une valeur propre.

Montrer que A admet trois valeurs propres distinctes $a<b<c$ et qu'elle est diagonalisable. trouver un vecteur propre associé à c.

On admet que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à b ; donner une matrice P dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

On pose $a_{i+1,j+1} = P_{X_n=j}(X_{n+1}=i)$ pour $(i,j) \in \{0,1,2\}^2$ et A la matrice de coefficients $a_{i+1,j+1}$; montrer que $AU_n = U_{n+1}$ et en déduire la loi de X_n.

Justifier que (U_n) admet une limite $\begin{pmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$. Reconnaître la variable aléatoire X telle que $\forall k \in \{0,1,2\}\,,\ P(X=k)=\ell_k$.

II) Montrer que $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X]\,,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

On pose $g(x)=f(x)$ si $x>0$ et $g(x)=0$ si $x \leqslant 0$.

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Peut-elle être solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre n ?

Exercice 8.

I) On admet la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Montrer que, pour $A \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin t}{x+t} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{\cos A}{x+A} - \int_0^A \frac{\cos t}{(x+t)^2} \mathrm{d}t$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} \mathrm{d}t$ converge pour $x > 0$.

En déduire que $\displaystyle g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} \mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner une expression simple de $g'' + g$.

II) Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p. Trouver la nature de la série de terme général $u_n = \frac{P(X>n)}{P(X=n)}$.

Exercice 9.

I) Montrer que, si M réelle, carrée d'ordre n et nilpotente, elle n'est pas inversible, admet 0 pour unique valeur propre et sera diagonalisable si et seulement si elle est nulle.

$\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$; montrer que, si tous les b_i sont nuls, M est diagonalisable si et seulement si tous les a_i sont nuls.

On suppose tous les a_i nuls ; donner une CNS pour que M soit diagonalisable.

Montrer que M admet au plus deux valeurs propres complexes non nulles.

II) Soit $\displaystyle I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) \mathrm{d}x$; trouver une relation entre I_n et I_{n+2}, puis montrer que $\sum I_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 10.

I) Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-n\ln x$.
Étudier les variations de f et montrer que l'équation (E_n) : $x=n\ln x$ admet 2 solutions, $U_n<V_n$. Montrer que (V_n) tend vers $+\infty$.
Montrer, pour $n\geqslant 3$, que $\ln n=\ln V_n-\ln\ln V_n$ et qu'un équivalent de V_n en $+\infty$ est $n\ln n$.
Soit $a>1$; étudier la série de terme général $\frac{1}{V_n^a}$ et montrer que la série de terme général $\frac{1}{n\ln n}$ ne converge pas.
Soit $a<1$; montrer que la série de terme général $\frac{1}{V_n^a}$ diverge.
Montrer que $1\leqslant U_n\leqslant \mathrm{e}$ et étudier la suite (U_n).
Montrer que $U_n=1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

II) On note D_n le déterminant de la matrice carrée de taille n, dont la diagonale est composée de 4, les sur et sous diagonales de 2, les autres coefficients étant nuls. Trouver une relation de récurrence entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n. Calculer D_n.
La matrice associée est-elle inversible ?

Exercice 11.

I) Calculer la dérivée de Φ, définie sur $]0,1]$ par $\Phi(t)=\frac{1-t^3}{t}$ et en déduire que Φ réalise une bijection de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que $\forall x\geqslant 0$, sa réciproque vérifie $(u(x))^3+xu(x)-1=0$.
Justifier la dérivabilité de u et montrer que $u'(x)=-\dfrac{u(x)}{3u(x)^2+x}$.
Montrer que $u(1)>\frac{1}{2}$ à l'aide de l'équation vérifiée par u, puis montrer que $\forall x\geqslant 0$, $|u'(x)|\leqslant\frac{1}{3u(x)}$.
Montrer qu'en $+\infty$, $u(x)\sim\frac{1}{x}$ et donner la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-u(x)\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$.
On pose $a_0=\dfrac{1}{2}$ et $a_{n+1}=u(a_n)$; on suppose que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2}\leqslant a_n\leqslant 1$ et $\lim_{n\to+\infty}a_n=L$, donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(a_n-L)$.
II) La matrice A, complexe, carrée d'ordre $n\geqslant 3$, de rang 2, de trace nulle et telle que $A-I_n$ ne soit pas inversible, admet-elle 0 pour valeur propre ?
Donner le cardinal de son spectre. Est-elle diagonalisable ?
III) Soit $\alpha=\mathrm{e}^{i\pi/10}$; α^3, α^7 et α^9 sont-elles racines de $1-X^2+X^4-X^6+X^8$?

Exercice 12.

I) Calculer la dérivée de Φ, définie sur $]0,1]$ par $\Phi(t) = \frac{1-t^3}{t}$ et en déduire que Φ réalise une bijection de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que $\forall x \geqslant 0$, sa réciproque vérifie $(u(x))^3 + xu(x) - 1 = 0$.
Justifier la dérivabilité de u et montrer que $u'(x) = -\dfrac{u(x)}{3u(x)^2 + x}$.
Montrer que $u(1) > \frac{1}{2}$ à l'aide de l'équation vérifiée par u, puis montrer que $\forall x \geqslant 0$, $|u'(x)| \leqslant \frac{1}{3u(x)}$.
Montrer qu'en $+\infty$, $u(x) \sim \frac{1}{x}$ et donner la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - u(x)\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$.
On pose $a_0 = \dfrac{1}{2}$ et $a_{n+1} = u(a_n)$; on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant 1$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$, donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(a_n - L)$.
II) La matrice A, complexe, carrée d'ordre $n \geqslant 3$, de rang 2, de trace nulle et telle que $A - I_n$ ne soit pas inversible, admet-elle 0 pour valeur propre ?
Donner le cardinal de son spectre. Est-elle diagonalisable ?
III) Soit $\alpha = \mathrm{e}^{i\pi/10}$; α^3, α^7 et α^9 sont-elles racines de $1 - X^2 + X^4 - X^6 + X^8$?

Exercice 13.

I) Montrer que f, défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(X) = X - 2\,\mathrm{Tr}(X)A$ où A est une matrice fixée, non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est un endomorphisme.
On choisit $\mathrm{Tr}\,A = \frac{1}{2}$; montrer que $\mathrm{Vect}A \subset \mathrm{Ker}\,f$.
On choisit $\mathrm{Tr}\,A \neq \frac{1}{2}$; montrer que $\mathrm{Ker}\,f = \{0\}$ et en déduire que f est injective si et seulement si $\mathrm{Tr}\,A \neq \frac{1}{2}$.
Déterminer $\mathrm{Ker}\,f$ quand $\mathrm{Tr}\,A = \frac{1}{2}$ et puis montrer que f est le projecteur sur l'ensemble des matrices de trace nulle parallèlement à $\mathrm{Vect}A$.
On choisit $\mathrm{Tr}\,A = 1$; montrer que f est une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}\,A \neq 0$.
II) Pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4n, \frac{1}{2})$, calculer $\mathbb{P}(|X - 2n| \geqslant n)$ et le comparer à $\frac{1}{n}$.

Exercice 14.

I) Pour $k \in [0,1[$, montrer que

$$u(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que u est impaire et que $\forall x \geqslant 0\,,\; u(x) \geqslant x$.
Montrer que u est une bijection sur des intervalles à préciser.
Montrer que $\mathrm{sn}(y) = \sin \circ\, u^{-1}(y)$ est impaire et la déterminer quand $k=0$.
On pose $\mathrm{cn}(y) = \cos \circ\, u^{-1}(y)$ t $\mathrm{dn}(y) = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(y)}$; montrer que sn, cn, dn sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer leur dérivée en fonction de sn, cn, dn.
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$, solution de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Montrer, à l'aide du changement de variable $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = \dfrac{a-b}{2}$ qu'il existe une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \Phi(x+y)$.
On admet que

$$h(x,y) = \frac{\mathrm{cn}(x)\mathrm{dn}(x)\mathrm{sn}(y) + \mathrm{sn}(x)\mathrm{cn}(y)\mathrm{dn}(y)}{1-k^2\mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y)}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle ci-dessus.
Donner une expression plus simple de h en fonction de sn, cn, dn.
II) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficients $m_{i,j}$, calculer $\mathrm{Tr}(M^T M)$.
Montrer que, si M est symétrique, de coefficients diagonaux égaux à ses valeurs propres, M est diagonale.

Exercice 15.

I) On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; pour $f_0 \in E$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Donner le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ et la valeur de la somme.
Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.
On admet que

$$(*) \quad \forall a > 0\,,\ \exists K > 0\,,\ \forall x \in [-a, a]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ |f_n(x)| \leqslant K\frac{|x|^n}{n!}.$$

Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $f' - f = f_0$ puis que

$$f(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

et prouver $(*)$.
II) Simplifier $S_k = 1 + j^k + j^{2j}$ pour k$\in \mathbb{N}$ et $j = \mathrm{e}^{i2\pi/3}$.
Une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre 1 et Y est le reste de la division euclidienne de X par 3 ; que vaut $P(Y = 0)$?

Exercice 16.

I) Montrer que $\forall x > 0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
Montrer que

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Arctan}(x \tan t)\mathrm{d}t$$

est définie, impaire continue et croissante sur $\mathbb{R}$ puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' sous forme d'intégrale.
Justifier que

$$\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{u}{x^2 + u^2}\mathrm{d}u$$

(on pourra faire le changement de variable $u = x \tan t$) ; f est-elle dérivable en 0 ? Montrer que

$$\forall x > 0\,,\ f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

II) Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \mathrm{e}^{ipt}$ et simplifier l'expression obtenue.

Exercice 17.

I) On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; montrer que Φ, qui à $f \in E$ associe g donnée par $g(x) = f'(x) - xf(x)$ est un endomorphisme.
Résoudre $y' - xy = 0$ et en déduire $\operatorname{Ker}\Phi$; Φ est-elle injective ? Surjective ?
Soit $g(x) = (1+x^2)\mathrm{e}^{x^2}$; écrire les solutions de $y' - xy = g$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^x (1+t^2)\mathrm{e}^{t^2/2}\mathrm{d}t$.
Déterminer $h(x)$ telle que $f(x) = h(x)\mathrm{e}^{x^2}$ soit solution de $y' - xy = g$ avec $f(0) = 0$ puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^x (1+t^2)\mathrm{e}^{t^2/2}\mathrm{d}t$.
Montrer que la restriction ϕ de Φ au sous-espace P des fonctions polynomiales est un endomorphisme ; est-il injectif ? surjectif ?

II) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Donner les lois de $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$.
Quelle est la loi conjointe de (U,V) ?

Exercice 18.

I) Justifier l'existence de $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.
Calculer $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n}$ et montrer que $v_n \sim \frac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant v_n$, en déduire la nature de $\sum u_n$.
Montrer que $\sum(-1)^n u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{-1}{1+t^3}\right)^n = -\frac{1}{2+t^3}$.
Calculer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3n(u_n - u_{n+1})$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n = \alpha\pi$ où α est un réel à déterminer.

II) On donne un ensemble E de cardinal n et, pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on note Ω_i l'ensemble des couples (A,B) de parties de E telles que $\operatorname{Card} B = i$ et $A \cup B = E$. Trouver $\operatorname{Card}\Omega_i$ (on pourra, au préalable, étudier le cas $n = 5$, $i = 3$).

Exercice 19.

I) On note u l'endomorphisme de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$.
Donner le rang de $A - I_3$ et en déduire que A n'est pas diagonalisable.
Donner $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id})$, $\ker(u - \mathrm{id})^2$ et montrer que $\mathbb{C}^3 = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})^2$.
On note v un endomorphisme de matrice X vérifiant $X^n = A$.
Montrer que u et v commutent et en déduire que $\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})^2$ sont stables par v.
Montrer que X est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; montrer que $JY = YJ$ et en déduire que $Y \in \mathrm{Vect}(I_2, J)$.
Résoudre $X^n = A$.

II) Montrer que

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{iyt} \mathrm{d}t$$

définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20.

I) On pose $U_0 = 1$, $U_{n+1} = (n+1)U_n + (-1)^{n+1}$, $V_n = \frac{U_n}{n!}$.
Calculer V_0, V_1, V_2, V_3 puis exprimer V_{n+1} en fonction de V_n et n.
Montrer que la suite (V_n) converge et déterminer sa limite.
On note $S(x)$ la somme de la série $\sum V_n x^n$, calculer son rayon de convergence.
Déterminer une équation différentielle dont S est solution.
Montrer que $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$ est développable en série entière sur un intervalle que l'on précisera et exprimer son développement en série entière en fonction de V_n.
Sur quel intervalle f est-elle égale à la somme de la série trouvée ?

II) Soient E espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ puis que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 21.

I) Montrer que $\ln(t+\sqrt{1+t^2})$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et en déduire

$$\tilde{f}_0(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t.$$

On note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t.$
Montrer que

$$I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(n+1)(1+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t.$$

En déduire que $I_n \sim \frac{1}{n\sqrt{2}}$.
Pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose $\Phi(f)(x) = \tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t.$
Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dont on déterminera le noyau.
Montrer que $\operatorname{Im}\Phi = \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\,,\, g(0)=0\}$.
Déterminer en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions f telles que $\Phi(f) = \lambda f$ et en déduire les valeurs propres de Φ.
Montrer que si f est développable en série entière, $\Phi(f)$ aussi.
II) On donne deux variables aléatoires X et Y, définies sur Ω et telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X=i, Y=j) = \frac{a}{i!2^{j+1}}$, $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer a puis les lois marginales de X et Y.

Exercice 22.

I) Résoudre $\sin((2n+1)\theta) = 0$, $\theta \in]0, \pi/2[$; montrer que

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1} &= \cos((2n+1)\theta) + i\sin((2n+1)\theta)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k}(-1)^k \cos^{2n+1-2k}\theta \sin^{2k}\theta\\ &+ i\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\cos^{2n-2k}\theta\sin^{2k+1}\theta\end{aligned}$$

(après avoir développé, on pourra séparer les termes pairs et les termes impairs).
Montrer $\exists! P_n \in \mathbb{R}_n[X]\,,\, P_n\left(\frac{1}{\tan^2\theta}\right) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}\theta}$ et expliciter P_n.
Trouver les racines de P_n, leur produit, leur somme.

II) Pour $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $f(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right)$.
Montrer que si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{y}{x^2}$, g vérifie une équation différentielle que l'on explicitera ; en déduire f et g.

Exercice 23.

I) Montrer que, pour $q \geqslant 2$, 1 est racine de de $Q(X) = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$.
Montrer que $R(X) = (X-1)Q(X) = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
Montrer que z racine de Q complexe, vérifie $q|z|^q \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$ et en déduire que $|z| \leqslant 1$ (on pourra raisonner par l'absurde et comparer $|z|^k$ et $|z|^q$ pour $k \in [\![0, q-1]\!]$).
On suppose alors que si $|z| = 1$, alors $z = 1$; sinon $|z| < 1$.
Montrer que R' est factorisable en produit de polynôme de degré 1 et en déduire que 1 est racine double de R. Montrer que les autres racines de R sont simples.
Soit A une matrice complexe, diagonalisable d'ordre n et dont le spectre est inclus dans l'ensemble des racines complexes de Q ; montrer que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection.
Montrer que si $|z| = 1$, alors $z = 1$ ou sinon $|z| < 1$.

II) Convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

Exercice 24.

I) Sur $E_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_P(M) = P^T M P + P^T M^T P$ et on note C l'ensemble des endomorphismes φ de E_n tels que pour tout M, $\varphi(M)^T = \varphi(M^T)$.
Soit M inversible, montrer que M^T est inversible et exprimer son inverse à l'aide de M^{-1}.
Montrer que $\varphi_P \in C$ et donner $\operatorname{Ker} \varphi_P$ en supposant P inversible.
Soit S_n l'ensemble des matrices symétriques et A_n l'ensemble des matrices antisymétriques, montrer que $E = S_n \oplus A_n$.
Montrer que $\varphi \in C$ si et seulement si $\varphi(S_n) \subset S_n$ et $\varphi(A_n) \subset A_n$.
Soient $n = 2$, $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; montrer que $\operatorname{Tr}(\varphi_P) = 2(\operatorname{Tr}^2 P - \operatorname{Tr} P)$ (on pourra considérer les matrices $E_{i,j}$ de la base canonique). Déterminer C.

II) Soit $f_k(x) = \frac{k^2}{k^2+1} x \mathrm{e}^{-kx}$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. La série de fonctions $\sum f_k$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

Exercice 25.

I) Montrer que $g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
Soit $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 - y^2}$; exprimer $F(x) = \int_0^x f(x, t) \mathrm{d}t$ en fonction de g, montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = f(x, x) + \displaystyle\int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \mathrm{d}t$.
Dans cette question, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles ; montrer que $\Phi(x, y) = \displaystyle\int_0^y f(x, t) \mathrm{d}t$ admet des dérivées partielles et les expliciter.

II) Montrer que f défini par $f(M) = M + M^T$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il diagonalisable ?

Exercice 26.

I) Soient p variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ admettant une variance. On note $\Gamma = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ la matrice des covariances. On cherche $c = (c_1, \dots, c_p) \in (\mathbb{R}^+)^p$, c non nul, tel que

$$\frac{1}{\parallel c \parallel^2} \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{p} c_i X_i\right)$$

soit maximal (pour avoir un échantillon le plus varié possible).
Montrer que

$$\forall c \in (\mathbb{R}^+)^p \, , \, \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{p} c_i X_i\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} c_i c_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

où $\rho \in \mathbb{R}^+$ est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres. Montrer que Γ est diagonalisable.

Soient $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p$ les valeurs propres de Γ énoncées dans l'ordre décroissant un nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité. On note C le vecteur ligne $C = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_p \end{pmatrix}$. Montrer que

$$C^T \Gamma C = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{p} c_i X_i\right)$$

et en déduire que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p \geqslant 0$. Montrer que

$$\frac{1}{\parallel c \parallel^2} \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{p} c_i X_i\right) \leqslant \lambda_1$$

On pourra se placer dans la base des vecteurs propres de Γ.
Montrer qu'il y a égalité si et seulement si c est un vecteur propre associé à λ_1.
Application : $p = 3$, $\rho \in [0, 1]$, X_1, X_2, X_3 3 variables aléatoires indépendantes de variances V_1, V_2 et V_3 telles que

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \, , \, i \neq j \, , \, \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \rho$$

On pose $Y_i = \frac{X_i}{\sqrt{V_1}}$ et $\Lambda = (\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$.

Trouver les valeurs propres de Λ et c tel que tel que

$$\frac{1}{\parallel c \parallel^2} \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{3} c_i X_i\right)$$

soit maximal.
II) Trouver les extremums de la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

Exercice 27.

I) On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$; montrer que $E_1 = \{f \in E\,,\ \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
Soient $f \in E_1$ et F une primitive de f ; montrer qu'il existe une unique primitive $P(f)$ dans E_1 et l'exprimer en fonction de F.
Montrer que $\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = P(f)(1)$.
Montrer que $\forall x \in [0,1]\,,\ P(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$.
Pour $x \in [0,1]$,on pose $f_x(t) = f(t+x)$ si $0 \leqslant t \leqslant 1-x$ et $f_x(t) = f(t+x-1)$ si $1-x \leqslant t \leqslant 1$.
Montrer que $\int_0^1 f_x(t)\mathrm{d}t = 0$ et calculer $\int_0^1 tf_x(t)\mathrm{d}t$.
II) Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $AB - BA = B$.
Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}\,,\ AB^k = B^k(A + kI_n)$ et en déduire que $\det B = 0$.

Exercice 28.

I) Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

converge pour $\alpha > 1$.
Montrer que $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge ainsi que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ (on pourra faire une intégration par parties).
Montrer que $\Phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis exprimer $\Phi'(x)$ sous forme d'une intégrale ; expliciter $\Phi'(0)$.
On admet que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Phi''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t$$

avec $f(x,t) = \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$; calculer $\Phi''(x) - \Phi(x)$.
Calculer explicitement $\Phi''(x)$, $\Phi'(x)$ et $\Phi(x)$.
II) Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer A^2.
On pose $S = \sum_{k=1}^n a_k$ et $B = 2A - SI_n$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible puis calculer B^{-1}.

Exercice 29.

I) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que A et B sont diagonalisables.
b) Montrer que $A+B$ n'est pas diagonalisable.
c) On note T l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes. Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
d) Quelles sont les matrices de T qui sont diagonalisables ?
e) Trouver un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables.
f) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables. Déterminer $F \cap T$. En déduire que

$$\dim F \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

g) Prouver que le cas d'égalité peut être réalisé.
h) Montrer que toute matrice diagonalisable appartient à un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

II) Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs, qui converge vers 0. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $v_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.
Prouver que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 30.

I) Soit $p \in]0,1[$. On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce qui fait pile avec une probabilité p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers effectués au moment où apparaît le premier pile.
1. Donner la loi de X.
2. On se donne des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de même loi que X.
On pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de M_n.
Indication : calculer $\mathbb{P}(M_n \geqslant k)$.

II) On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour toute fonction f de E, on pose

$$N(f) = |f(0)| + \| f' \|_\infty .$$

a) Montrer que N est une norme sur E.
b) Prouver la majoration $\| f \|_\infty \leqslant N(f)$. Les normes N et $\| \ \|_\infty$ sont-elle équivalentes ?

Exercice 31.

1) Soient deux réels a et b tels que $1 + a < b$ et une suite de réels u_n positifs tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$. Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln \dfrac{n+a}{n+b}$ au voisinage de $+\infty$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \ln \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = -\infty$ et en déduire que (u_n) tend vers 0.
On pose $\alpha = b - a$, $v_0 = u_0$ et $v_n = n^\alpha u_n$; montrer que $\sum \ln \dfrac{v_{k+1}}{v_k}$ converge.
Montrer qu'il existe un réel A tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$.
Étudier la convergence de $\sum u_n$.

2) $A = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$ peut-elle être inversible ? À quelle(s) condition(s) sur x et y représente-t-elle un projecteur non nul ?
Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi binomiale de paramètre n et p.
Quelle est la probabilité que $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) \end{pmatrix}$ soit inversible ?
Quelle est la probabilité pour que ce soit un projecteur non nul ?

Exercice 32.

I) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{pmatrix}$$

est-elle symétrique ? Donner ses valeurs propres.
II) On donne $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant n+1$ et en déduire le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.
Montrer que sa somme S vérifie $(2-x)S'(x) - 2S(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$.

Exercice 33.

I) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^T A = A A^T$ et $A^p = 0$ avec $p \geqslant 1$.
Montrer que $AA^T = 0$ puis que $A = 0$.
II) Monter qu'il existe un unique réel x_n tel que $g_n(x_n) = 1$ avec

$$g_n(x) = \int_n^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$$

puis déterminer un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 34.

I) Montrer que $\Gamma_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^k M = A^{k-1}M\}$ où A est fixé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Montrer que $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

On choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; trouver Γ_1, Γ_2, Γ_3.

Montrer que si A est inversible, $\Gamma_1 = \Gamma_2$; étudier la réciproque.

On note $u_k = \dim \Gamma_k$: montrer que la suite (u_k) est croissante et qu'il existe un plus petit entier p tel que $u_p = u_{p+1}$.

Montrer que $p = 2$ si A est diagonalisable et admet 0 pour valeur propre.

II) Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ puis trouver sa limite en $+\infty$.

Exercice 35.

I) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$ est définie et vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

II) Soit G un ensemble de p matrices carrées d'ordre n inversibles, stable pour le produit matriciel. Montrer que $M \mapsto MA_i$ est une bijection de G dans G, où A_i est l'une des matrices de G. Exemples de partie G.

Exercice 36.

I) Soit a et s deux réels strictement positifs et $u_n(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-s}$.

Déterminer la nature de la série de terme général $a^{u_n(s)}$ selon les valeurs de a et de s.

II) Donner une ou deux condition nécessaire ou suffisante pour qu'une matrice A soit diagonalisable.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, de rang 2 et de trace nulle.

Montrer que l'équation $X^2 = A$ admet quatre solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 37.

I) Soit (E) : $y'(x) = 2xy(x) + 1$ et f une solution de (E) telle que $f(0) = 0$. Justifier l'existence de f. Exprimer f à l'aide d'une intégrale. Chercher les solutions de (E) ayant un développement en série entière et donner le rayon de convergence de ces séries. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$.

II) La matrice $A = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 38.

I) On pose $f(x) = x \sin x$; calculer $f''(x) + f(x)$.
Résoudre sur $\mathbb{R}$: (E_1) : $y'' + y = \cos x$ et (E_2) : $y'' - y = x$.
Donner les solutions paires de (E_1) et les solutions impaires de (E_2).
Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.
Montrer que Ψ, défini sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $\Phi(f)(x) = f''(x) + f(-x)$ est un endomorphisme dont on précisera le noyau.
Est-il surjectif ? Quelle est la dimension de E ?
II) Que dire de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A^4 + A^2 + A = 0$?

Exercice 39.

I) On note $K(f) = \{P(f), P \in K[X]\}$ où f est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension n, possédant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Montrer que si $P \in K_{n-1}[X]$, s'annule pour chaque λ_i, alors il est nul.
Montrer que $\forall k \geqslant 1$, f^k est diagonalisable.
Montrer que $(\mathrm{id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre.
On note e_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i$.
Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
Montrer que f^n est combinaison linéaire de $\mathrm{id}, f, \dots, f^{n-1}$.
Montrer que $(\mathrm{id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est une base de $K(f)$.
II) Définition, parité, variations et limites de $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} \mathrm{d}t$. Pour les limites, on pourra montrer que $\exists \alpha$, $\forall t \in]0, \alpha[$, $\left| \dfrac{\operatorname{ch} t - 1}{t} \right| \leqslant t$.

Exercice 40.

I) Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t - 1}$.
En déduire $f^{(k)}(0)$ pou $0 \leqslant k \leqslant 3$.
On pose $p_0 = 1$ et $p_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.
Calculer p_1, p_2 et p_3 puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \leqslant n!$.
Montrer que le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{p_n}{n!} x^n$ est non nul.
On note F sa somme quand elle est définie.
Montrer que $\forall x \in [-R, R]$, $F'(x) = \mathrm{e}^x F(x)$ et en déduire que $f^{(n)}(0) = p_n$.
On note p_n le nombre de partitions possibles de $[\![1, n]\!]$ et on pose $p_0 = 1$.
Montrer que $p_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.
II) Montrer que si A est une matrice réelle, carrée de taille n et de rang 1, $A + I_n$ ou $A - I_n$ n'est pas inversible.
Montrer que si B est une matrice réelle, carrée de taille n et nilpotente d'ordre $p < n$, c'est à dire que $B^p = 0$ et $B^{p-1} \neq 0$, $B + I_n$ et $B - I_n$ sont inversibles.

Exercice 41.

I) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t$ existe.
Montrer que $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ existe pour $x > 0$.
Établir une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n)$.
Où $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est-elle définie ? On donne $S(4) = \frac{\pi^4}{90}$.
Pour quels t a-t-on $\displaystyle\frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-(n+1)t}$?
Calculer I.
Donner l'ensemble de définition de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t$.
Exprimer F à l'aide de S et I ; étudier sa continuité.
II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée et $\phi(X,Y) = X^T AY$ avec X et Y vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Calculer $\phi(E_i, E_j)$ où les E_i constituent la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Donner les conditions sur A pour que ϕ soit un produit scalaire.

Exercice 42.

I) Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, H un hyperplan de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que H est stable par u si et seulement si $\exists\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(u + \lambda\mathrm{id}) \subset H$.
Trouver les sous-espaces stables de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
II) Trouver les extrema, s'il existent, de $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - y$.

Exercice 43.

I) Trouver les polynômes constants de $\mathbb{C}[X]$ tels que :
$P(X^2 - 1) = P(X-1)P(X+1)$.
Soit E l'ensemble des solutions de cette équation : $2X - 1$ est-il dans E ?
Montrer que si z est une racine de $P \in E$, non constant, $(z+1)^2 - 1$ est aussi racine de P.
Si P est non constant, justifier qu'il admet une racine complexe a_0.
Montrer que les termes de la suite (a_n), de premier terme a_0 et vérifiant $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$, sont tous racines de P.
Montrer que si $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$, (a_n) est strictement croissante et en déduire que P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que -1 n'est pas racine de P.
Exprimer $b_n = a_n + 1$ en fonction de n et a_0 et en déduire que $|a_0 + 1| = 1$.
On admet que $|a_0 - 1| = 1$; conclure quant aux éléments de E.
II) Montrer que (u_n) définie par la donnée de u_0 et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_n)$, converge vers 0. Donner la nature de $\sum u_n$.
III) Donner un exemple de matrice de taille 2 non diagonalisable.

Exercice 44.

I) Sur $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose $f(x,y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$.
Montrer que f admet un unique point critique (a,b) sur D.
Montrer qu'il existe une fonction $e(h,k)$ positive au voisinage de $(0,0)$ telle que $f(a+h,b+k) - f(a,b) = e(h,k) + \mathrm{o}(h^2) + \mathrm{o}(k^2)$.
Que peut-on en déduire ? Proposer une seconde méthode.
f admet-elle des extrema sur D ?

II) Soit $M = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ B & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$; calculer M^2.
Justifier que si si $P(M) = 0$, les valeurs propres de M sont racines de P.
On choisit $A = B^{-1}$; justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et préciser les dimensions des sous-espaces propres.

Exercice 45.

I) Convergence de $\sum f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.
Montrer que la somme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n(1)$.

II) On donne $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où A et B sont deux matrices carrées complexes de taille n qui commutent.
Montrer que si U est semblable à V, alors pour tout polynôme P, $P(U)$ est semblable à $P(V)$.
Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.
Montrer que si A est diagonalisable, et B nulle, alors M est diagonalisable.

Exercice 46.

I) Pour $n \geqslant 2$, étudier les variations de $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner ses limites aux bornes. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
$\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $]1,+\infty[$? Y-a-t-il convergence normale ?
Étudier les variations et donner les limites de $S = \sum f_n$ sur $]1,+\infty[$.
Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Nature, pour $a \geqslant 2$ de $\sum I_n(a)$ avec $I_n(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

II) Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$ et calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9}$.

Exercice 47.

I) Montrer que $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x+t}\mathrm{d}t$ ne converge que pour $x>0$.
Montrer que F est décroissante et positive.
Montrer que $\forall x>0\,,\ xF(x)\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ et en déduire sa limite en $+\infty$.
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $2xF(x)-F'(x)=\frac{2}{x}$.
En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que $F(x)=2\mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\mathrm{d}t$ et en déduire que $F(x)\sim -2\ln x$ en 0^+.

II) On note x,y,z les racines de X^3+aX^2+bX+c.
Exprimer $x+y+z$ et $xy+xz+yz$ en fonction de a, b et c.

Exercice 48.

I) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2-x-1=0$.
On pose $x_0=1$, $x_1=2$ et $x_{n+2}=\frac{x_n+x_{n+1}}{2}$; donner l'expression de x_n en fonction de n et trouver sa limite.
$\forall n\in\mathbb{N}$, on définit U_n par $U_{n+2}\leqslant\dfrac{U_n+U_{n+1}}{2}$ et V_n par $V_n=\max(U_n,U_{n+1})$. Montrer que $\forall p\in\mathbb{N}$, $U_{p+2}\leqslant V_p$.
Montrer que si $U_{p+1}\leqslant U_{p+2}$ alors $V_{p+1}\leqslant V_p$ et en déduire que (V_n) est décroissante.
On suppose que (V_n) diverge ; qu'en déduire pour (U_n) ?
On suppose que (U_n) est minorée ; qu'en déduire pour (V_n) ?
On suppose que (U_n) est minorée ; on note ℓ la limite de (V_n) et on admet que $2\ell-V_n\leqslant U_{n+1}$; montrer que (U_n) converge et donner sa limite.
Montrer par l'absurde que $2\ell-V_n\leqslant U_{n+1}$.

II) Montrer que f, définie sur E euclidien par $f(x)=x-(a|x)b$ où a et b sont deux vecteurs non nuls de E est un endomorphisme et qu'il est bijectif si et seulement si $(a|b)\neq 1$.

Exercice 49 (EIVP)**.**

I) Montrer que la série de terme général $u_n=\dfrac{(-1)}{1+n\alpha}$ où $\alpha>0$ converge et que sa somme vaut $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

II) On donne n variables aléatoires X_k indépendantes telles que pour $k\in[\![1,n]\!]$, $X_k\hookrightarrow\mathcal{B}(p_k)$.
Donner les lois de $Y=\displaystyle\prod_{k=1}^n X_k$, $W=\max_{k\in[\![1,n]\!]}X_k$ et $Z=\max_{k\in[\![1,n-1]\!]}(X_{k+1}-X_k)$.