

Devoir surveillé n°1

2 heures

Exercice 1

1. Soit θ un réel. Linéariser $\sin^3 \theta$. On trouvera $\sin^3 \theta = \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin(3\theta))$.
2. En déduire une simplification de la somme

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3 \left(\frac{\theta}{3^{k+1}} \right)$$

3. Pour tout θ réel, en déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(S_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2

On souhaite démontrer que les fonctions $\sin$, $\cos$, $\exp$, sh sont linéairement indépendantes (en termes de vecteurs de l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a \sin + b \cos + c \exp + d \text{sh} = 0$$

En utilisant les développements limités en 0 à l'ordre 3, montrer que $a = b = c = d = 0$ et conclure.

Comment faudrait-il procéder avec les fonctions $\sin$, $\cos$, $\exp$, $\ln$? (on ne demande pas d'effectuer les calculs).

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$u(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que u définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \text{Ker } u$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = P(0).$$

En déduire que $Q = P - P(0)$ est le polynôme nul.

En déduire que $\text{Ker } u$ est l'ensemble des polynômes constants.

3. Montrer que $\text{Im } u \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ puis en déduire $\text{Im } u$.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose

$$(P|Q) = \int_0^1 t^2 P(t) Q(t) dt$$

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $P = X^n$ et F le sous-espace vectoriel de E défini par $F = \text{Vect}(1, X)$.
 - (a) Calculer $(X^p|X^q)$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
 - (b) Déterminer le projeté orthogonal de P sur F que l'on notera $\Pi = a + bX$.
 - (c) En déduire

$$\inf_{(u,v) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2 (t^n - u - vt)^2 dt$$

que l'on exprimera en fonction de a, b et n .

Exercice 5

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi, dite de loi de RADEMACHER de paramètre p , avec $0 < p < 1$, et définie par

$$P(X_n = 1) = p \quad ; \quad P(X_n = -1) = 1 - p$$

On considère de plus, pour n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $T_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

1. Donner l'espérance et la variance des variables aléatoires X_n .
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n puis calculer $E(T_n)$.
En déduire une relation entre $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$.
3. Écrire une autre relation entre $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$ et en déduire la loi de T_n .
4. On dit qu'une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs entières converge en loi vers une variable aléatoire U à valeurs entières si

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n = k) = P(U = k).$$

Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on précisera la loi.

5. Soit T' une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables X_n .
 - (a) Montrer que

$$(|T_{n+1} - T'| < 1/2) \cap (|T_n - T'| < 1/2) \subset (|T_{n+1} - T_n| < 1)$$

- (b) En déduire que

$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) \leq P(|T_{n+1} - T'| \geq 1/2) + P(|T_n - T'| \geq 1/2)$$

- (c) Quelles sont les valeurs prises par $T_{n+1} - T_n$? En déduire que

$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = 1 - p$$

- (d) On dit qu'une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire U si

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|U_n - U| \geq \varepsilon) = 0$$

La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en probabilité?

Exercice 1

1. On propose deux méthodes :

- la méthode générale, avec les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) = -\frac{1}{4} \times \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2i} \\ &= -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta = \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta)\end{aligned}$$

- méthode en utilisant les formules trigonométriques :

$$\begin{aligned}\sin^3 \theta \sin \theta \sin^2 \theta &= \sin \theta \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos 2\theta \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{4} (\sin(3\theta) - \sin \theta) = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta\end{aligned}$$

2. On a donc en utilisant la relation linéarité ci-dessus

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \left[3^{k+1} \sin \left(\frac{\theta}{3^{k+1}} \right) - 3^k \sin \left(\frac{\theta}{3^k} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^{n-1} 3^{k+1} \sin \left(\frac{\theta}{3^{k+1}} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin \left(\frac{\theta}{3^k} \right) \right)\end{aligned}$$

Et par télescopage, on obtient

$$S_n(x) = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \left(\frac{\theta}{3^n} \right) - \sin \theta \right)$$

3. Ainsi, comme $\frac{\theta}{3^n}$ tend vers 0, on a

$$\sin \left(\frac{\theta}{3^n} \right) \sim \frac{\theta}{3^n}$$

et donc

$$3^n \sin \left(\frac{\theta}{3^n} \right) \sim \theta$$

et on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{\theta - \sin \theta}{4}.$$

Exercice 2

On effectue un développement limité en 0 à l'ordre 3 :

$$a \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + b \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + c \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) + d \left(x + \frac{x^3}{6} \right) + o_0(x^3) = 0$$

et ainsi par unicité du développement limité

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + c + d = 0 \\ -\frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 0 \\ -\frac{a}{6} + \frac{c}{6} + \frac{d}{6} = 0 \end{cases}$$

et ainsi $b = c$ (troisième) puis $b = c = 0$ (avec la première) et $a = d$ (quatrième) puis $a = d = 0$ (avec la seconde). Ainsi on a bien $a = b = c = d = 0$ et donc la famille de fonctions $(\sin, \cos, \exp, \text{sh})$ est bien une famille libre.

Pour la famille de fonctions $(\sin, \cos, \exp, \ln)$, on peut aussi effectuer un développement limité, mais en 1 par exemple (adaptée à $\ln$, mais moins aux trois autres fonctions). Les calculs pour aboutir seront plus laborieux.

Exercice 3

1. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P(X+1)$ et $P(X)$ sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ et ainsi par différence $u(P)$ aussi. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

et ainsi u est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P \in \text{Ker } u$. On a $u(P) = 0$ et ainsi $P(X+1) = P(X)$. On considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $P(n) = P(0)$ » pour tout entier naturel n .

On a $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie de manière évidente.

Si on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour un certain entier naturel n , alors $P(n) = P(0)$. Or on a $P(n+1) = P(n)$ et par hypothèse de récurrence, $P(n) = P(0)$ et ainsi $\mathcal{P}(n+1) = P(0)$ et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi, ce qui achève la récurrence.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.

Ainsi $Q = P - P(0)$ admet tous les entiers naturels comme racines, donc une infinité de racines, et ainsi par propriété, Q est le polynôme nul. Donc P est constant. On a $\text{Ker } u \subset \mathbb{R}$. Réciproquement, si P est constant, on a $u(P) = P(X+1) - P(X) = 0$ et donc $P \in \text{Ker } u$. On a $\mathbb{R} \subset \text{Ker } u$.

On a donc finalement prouvé **par double inclusion** que $\text{Ker } u = \mathbb{R}$.

3. Soit $Q \in \text{Im } u$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = u(P) = P(X+1) - P(X)$. On écrit

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

et

$$P(X+1) = a_n (X+1)^n + \cdots + a_1 (X+1) + a_0$$

et ainsi

$$Q = u(P) = P(X+1) - P(X) = a_n((X+1)^n - X^n) + \underbrace{a_{n-1}((X+1)^{n-1} - X^{n-1}) + \cdots + a_1}_{\text{deg} \leq n-1}$$

et comme

$$(X+1)^n - X^n = X^n + nX^{n-1} + \cdots + nX + 1 - X^n = nX^{n-1} + \cdots + nX + 1$$

de degré inférieur à $n-1$, on obtient que $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc finalement, on a prouvé que $\text{Im } u \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

L'autre inclusion est plus difficile. Mais d'après le théorème du rang, on a

$$n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X] = \text{rg } u + \dim \text{Ker } u$$

et ainsi $\text{rg } u = n$. Or $\text{Im } u \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\text{rg } u = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et donc par théorème, $\text{Im } u = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 4

1. $(\cdot|\cdot)$ est à valeurs réelles. La symétrie est claire; on montre la linéarité selon la première position, d'où la bilinéarité : soient P, Q et R des polynômes, λ et μ des scalaires, on a

$$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q|R) &= \int_0^1 (\lambda P(t) + \mu Q(t))R(t)dt \\&= \int_0^1 t^2(\lambda P(t)R(t) + \mu Q(t)R(t))dt \\&= \lambda \int_0^1 t^2 P(t)R(t)dt + \mu \int_0^1 t^2 Q(t)R(t)dt = \lambda(P|R) + \mu(Q|R)\end{aligned}$$

Pour tout polynômes P , on a

$$(P|P) = \int_0^1 t^2 P^2(t)dt \geq 0$$

comme intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction positive. Si

$$(P|P) = \int_0^1 t^2 P^2(t)dt = 0$$

comme $t \mapsto t^2 P^2(t)$ est continue, positive, elle doit être nulle. Ainsi

$$\forall t \in [0, 1], t^2 P^2(t) = 0$$

puis $P^2(t) = 0$ sur $]0, 1]$, puis $P(t) = 0$ sur $]0, 1]$. Ainsi P admet une infinité de racines, et donc il est nul.

On a bien montré que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E .

2. (a) on a

$$(X^p|X^q) = \int_0^1 t^2 t^p t^q dt = \int_0^1 t^{2+p+q} dt = \left[\frac{1}{p+q+3} t^{q+p+3} \right]_0^1 = \frac{1}{p+q+3}$$

- (b) Le projeté de X^n sur F est caractérisé par

$$\begin{cases} \Pi = a + bX \\ (X^n - a - bX|1) = 0 \\ (X^n - a - bX|X) = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} (X^n|1) - (a|1) - b(X|1) = 0 \\ (X^n|X) - a(1|X) - b(X|X) = 0 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} \frac{1}{n+3} - \frac{a}{3} - \frac{b}{4} = 0 \\ \frac{1}{n+4} - \frac{a}{4} - \frac{b}{5} = 0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{3}{n+3} - a - \frac{3}{4}b = 0 \\ \frac{4}{n+4} - a - \frac{4}{5}b = 0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$b \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5} \right) = \frac{3}{n+3} - \frac{4}{n+4}$$

soit

$$b = \frac{\frac{3}{n+3} - \frac{4}{n+4}}{\frac{3}{4} - \frac{4}{5}} = 20 \left(\frac{4}{n+4} - \frac{3}{n+3} \right) = \frac{20n}{(n+3)(n+4)}$$

et

$$\begin{cases} \frac{4}{n+3} - \frac{4}{3}a - b = 0 \\ \frac{5}{n+4} - \frac{5}{4}a - b = 0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$a \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4} \right) = \frac{4}{n+3} - \frac{5}{n+4}$$

soit

$$a = \frac{\frac{4}{n+3} - \frac{5}{n+4}}{\frac{4}{3} - \frac{5}{4}} = 12 \left(\frac{4}{n+3} - \frac{5}{n+4} \right) = -\frac{12(n-1)}{(n+3)(n+4)}$$

Le projeté orthogonal de X^n sur V est donc

$$\Pi = -\frac{12(n-1)}{(n+3)(n+4)} + \frac{20n}{(n+3)(n+4)}X$$

(c) V étant un sous-espace de dimension finie de E , la distance de X^n à V au carré est donnée par

$$\|X^n - \Pi\|^2 = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^n - a - bX\|^2$$

et ainsi

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2 (t^n - a - bt)^2 dt = \|X^n - \Pi\|^2$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|X^n - \Pi\|^2 &= \int_0^1 t^2 (t^n - a - bt)^2 dt \\ &= \int_0^1 t^2 (t^{2n} + a^2 + b^2 t^2 - 2at^n - 2bt^{n+1} + 2abt) dt \\ &= \frac{1}{2n+3} + \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{5} - \frac{2a}{n+4} + \frac{2ab}{4} \end{aligned}$$

Exercice 5

1. La variable aléatoire X_n prend un nombre fini de valeurs, les valeurs -1 et 1 , et on a

$$P(X_n = -1) = 1 - p \quad P(X_n = 1) = p$$

et ainsi X_n admet une espérance et une variance, avec

$$E(X_n) = -1 \times (1 - p) + 1 \times p = 2p - 1.$$

Comme $X_n^2 = 1$, X_n^2 admet une espérance, et $E(X_n^2) = 1$ et ainsi

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 1 - (2p - 1)^2 = (1 + 2p - 1)(1 - 2p + 1) = 4p(1 - p)$$

On aurait aussi pu remarquer de façon plus efficace que $Y_n = \frac{X_n+1}{2}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p , et ainsi comme $X_n = 2Y_n - 1$, nous avons par propriétés l'existence de l'espérance et de la variance avec

$$E(X_n) = 2E(Y_n) - 1 = 2p - 1 \quad V(X_n) = 4V(Y_n) = 4p(1 - p).$$

2. On a l'image de T_n contenu dans $\{-1, 1\}$, et -1 et 1 peuvent être effectivement prises. Ainsi l'ensemble des valeurs prises par T_n est $\{-1, 1\}$. On a alors T_n qui admet une espérance avec

$$E(T_n) = -1 \times P(T_n = -1) + 1 \times P(T_n = 1)$$

Or comme les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, on a aussi

$$E(T_n) = \prod_{k=1}^n E(X_k) = (2p - 1)^n$$

Ainsi, nous obtenons la première relation

$$P(T_n = 1) - P(T_n = -1) = (2p - 1)^n$$

3. Mais nous avons aussi bien sûr puisque $((T_n = -1), (T_n = 1))$ complet,

$$P(T_n = 1) + P(T_n = -1) = 1$$

On en déduit alors à l'aide de la question précédente, par somme et différence, que

$$P(T_n = 1) = \frac{1 + (2p - 1)^n}{2} \quad P(T_n = -1) = \frac{1 - (2p - 1)^n}{2}$$

4. Nous avons, sachant que comme $0 < p < 1$, $-1 < 2p - 1 < 1$, $((2p - 1)^n)$ converge vers 0,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = 1) = \frac{1}{2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = -1) = \frac{1}{2}}$$

Ainsi la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T de loi la loi de RACHEMACHER de paramètre $\frac{1}{2}$.

5. Soit T' une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables X_n .

- (a) On raisonne en termes d'événements : si $|T_{n+1} - T'| < 1/2$ et $|T_n - T'| < 1/2$, alors

$$|T_{n+1} - T_n| = |T_{n+1} - T' + T' - T_n| \leq |T_{n+1} - T'| + |T' - T_n| < 1/2 + 1/2 = 1$$

On a donc bien

$$\boxed{(|T_{n+1} - T'| < 1/2) \cap (|T_n - T'| < 1/2) \subset (|T_{n+1} - T_n| < 1)}$$

- (b) Ainsi on a par croissance des probabilités au sens de l'inclusion,

$$P((|T_{n+1} - T'| < 1/2) \cap (|T_n - T'| < 1/2)) \leq P((|T_{n+1} - T_n| < 1))$$

puis par la formule reliant probabilité de l'intersection et de la réunion

$$-P((|T_{n+1} - T'| < 1/2) \cup (|T_n - T'| < 1/2)) + P((|T_{n+1} - T'| < 1/2) + P(|T_n - T'| < 1/2))$$

$$\leq P((|T_{n+1} - T_n| < 1)) \text{ d'où par complémentarité}$$

$$\begin{aligned} & -P((|T_{n+1} - T'| < 1/2) \cup (|T_n - T'| < 1/2)) \\ & + 1 - P((|T_{n+1} - T'| \geq 1/2)) \\ & + 1 - P(|T_n - T'| \geq 1/2) - 1 \leq 1 - P((|T_{n+1} - T_n| \geq 1)) \end{aligned}$$

et ainsi $P((|T_{n+1} - T_n| \geq 1)) \leq$

$$P(|T_{n+1} - T'| \geq 1/2) + P(|T_n - T'| \geq 1/2) + P((|T_{n+1} - T'| < 1/2) \cup (|T_n - T'| < 1/2)) - 1$$

et donc finalement

$$\boxed{P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) \leq P(|T_{n+1} - T'| \geq 1/2) + P(|T_n - T'| \geq 1/2)}$$

(c) Les valeurs prises par $T_{n+1} - T_n$ sont $-2, 0, 2$. Ainsi

$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = P(|T_{n+1} - T_n| = 2)$$

Or

$$(|T_{n+1} - T_n| = 2) = ((T_{n+1} = 1) \cap (T_n = -1)) \cup (T_{n+1} = -1) \cap (T_n = 1))$$

et ainsi (réunion disjointe)

$$P(|T_{n+1} - T_n| = 2) = P((T_{n+1} = 1) \cap (T_n = -1)) + P(T_{n+1} = -1) \cap (T_n = 1))$$

Or

$$P((T_{n+1} = 1) \cap (T_n = -1)) = P((T_n = -1) \cap (X_{n+1} = -1))$$

et comme $X_1, \dots, X_{n+1}$ indépendantes, par le lemme des coalitions, T_n e X_{n+1} aussi et ainsi

$$P((T_{n+1} = 1) \cap (T_n = -1)) = P(T_n = -1).P(X_{n+1} = -1) = \frac{1 - (2p - 1)^n}{2} \times (1 - p)$$

De la même façon on a

$$\begin{aligned} P(T_{n+1} = -1) \cap (T_n = 1)) &= P((T_n = 1) \cap (X_{n+1} = -1)) = P(T_n = 1).P(X_{n+1} = -1) \\ &= \frac{1 + (2p - 1)^n}{2} \times (1 - p) \end{aligned}$$

On en déduit en sommant que

$$\boxed{P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = 1 - p > 0.}$$

(d) Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeait en probabilité vers T' , alors $P(|T_{n+1} - T'| \geq 1/2)$ et $P(|T_n - T'| \geq 1/2)$ devraient converger vers 0, et donc la somme aussi, et ainsi par l'inégalité de 5b), $P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1)$ aussi, ce qui contredit la question précédente 5c). La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge donc pas en probabilité.