Exercice 1

On considère la fonction f de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que f admet des développements limités à tout ordre en 0. On note

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \quad (*)$$

3. Déterminer a_0 , a_1 et a_2 (méthode non imposée).
4. Proposer deux méthodes issues du cours pour calculer les coefficients a_n . Est-ce raisonnable et pourquoi ?
5. On se propose de calculer de manière générale a_n pour tout entier n .
 - (a) En utilisant le fait que $(1+x+x^2)f(x) = 1$ et $(*)$, montrer que

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 = 0 \\ a_k + a_{k-1} + a_{k-2} = 0, k \geq 2 \end{cases}$$

- (b) En déduire une expression de a_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
 - (c) Calculer a_n pour $n \in \{0, \dots, 100\}$. Conclusion ?

Exercice 2

Soit f une fonction positive, continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$ avec n_0 un entier naturel.

1. (a) Montrer que

$$\forall n \geq n_0, \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$$

et que

$$\forall n \geq n_0 + 1, f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

- (b) On pose pour tout n , $n \geq n_0$

$$U_n = \sum_{k=n_0}^n f(k) - \int_{n_0}^n f(t) dt$$

Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est monotone. Montrer aussi que

$$U_n \geq \int_n^{n+1} f(t) dt$$

En déduire que la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est convergente.

(c) On pose pour tout entier naturel non nul

$$V_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad W_n = \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2}$$

Montrer que les suites (V_n) et (W_n) sont convergentes.

2. On pose pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln k}{k} \quad t_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$$

(a) Montrer que pour tout n , $n \geq 3$,

$$S_{2n} = t_n - t_{2n} + \ln 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$$

(b) En déduire une expression de S_{2n} à l'aide de W_n , W_{2n} et V_n . En déduire que (S_{2n}) converge et préciser sa limite.

(c) Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

est convergente. On utilisera (S_{2n+1}) . On note S sa somme. Est-elle absolument convergente ?

(d) Déterminer S en fonction de $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

Fin