Quinzaine 2 du 29/09 au 10/10

Chapitre 1 : *Compléments sur les séries numériques*
Pour une fonction continue et monotone positive, encadrement des sommes partielles de la série $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles (intégrales) ; diverses situations (f définie sur $[0,+\infty[$ ou sur $[1,+\infty[$), divers encadrements. Application aux séries de Riemann. Détermination d'un équivalent du reste d'ordre n dans le cas de convergence. Détermination d'un équivalent de la somme partielle dans le cas de divergence. On a (*)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$$

et aussi si $\alpha < 1$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$$

et si $\alpha > 1$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ avec

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Théorème fondamental (admis) : si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ aussi et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Preuve dans le cas des termes positifs.
Exemples d'utilisation du produit de Cauchy de deux séries numériques.
Produit de Cauchy d'une série géométrique avec elle-même (*).
Produit de Cauchy de deux séries alternées.
Produit de Cauchy de la série harmonique alternée avec elle-même.

Chapitre 2 : *Espaces vectoriels - Révisions compléments*
Trace d'une matrice carrée.
Relation $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ (*).
Inariance de la trace par similitude.
Trace d'un endormorpghisme en dimension finie.
Linéarité de la trace.
La trace d'un projecteur est égal à son rang.

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
Polynôme annulateur d'un endormorphisme, d'une matrice.
Polynôme annulateur d'une matrice diagonale.

Relations $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$, $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.
Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent.
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées. Application au calcul de l'inverse et des puissances.
Méthode par la division euclidienne.

Questions de cours :

— Les énoncés des définitions, des théorèmes.
— Les démonstrations marquées par (*).
— Les méthodes usuelles sur des exemples.