Devoir en temps libre n°2

1. Quelques résultats préliminaires.
   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A^T) = \mathrm{Tr}(A)$.
   (b) Existe-t-il $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?
   (c) On considère les matrices E_{i_0,j_0} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définies par

$$E_{i_0,j_0} = (\delta^i_{i_0}\delta^j_{j_0})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

   c'est à dire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i_0 et colonne j_0 qui vaut 1.

   Vérifier que
$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta^k_j E_{i,\ell} \qquad (*)$$
   On donnera quelques exemples concret de cette propriété pour bien asseoir cette formule.

2. Soit θ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$) telle que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,,\ \theta(AB) = \theta(BA).$$

   (a) Montrer que si $i \neq \ell$, on a $\theta(E_{i,\ell}) = 0$. On utilisera le produit $E_{i,j}E_{j,\ell}$.
   (b) Montrer que pour tout i et j, $\theta(E_{i,i}) = \theta(E_{j,j})$. On pose α ce scalaire commun.
   (c) Montrer que $\theta = \alpha\,\mathrm{Tr}$.
   (d) En déduire que $\{\theta \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\mathbb{K})/\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,,\ \theta(AB) = \theta(BA)\}$ est une droite vectorielle de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\mathbb{K})$ dont on donnera un vecteur directeur.

3. Un produit scalaire pas si nouveau que ça.

   Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose
$$(A|B) = \mathrm{Tr}(AB^T)$$
   (a) Montrer que $(\quad|\quad)$ est symétrique et bilinéaire. On n'utilisera pas les coefficients des matrices A et B.
   (b) Les propriétés de positivité et du caractère défini posent problème. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$, calculer $(A|B) = \mathrm{Tr}(AB^T)$ en fonction des coefficients de A et de B.
   Que reconnaît-on ? Conclure.
   (c) Justifier que les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et rappeler la décomposition d'une matrice A sur ces deux sous-espaces supplémentaires.

4. On considère l'ensemble H des combinaisons linéaires des matrices de la forme

$$AB - BA$$

   où $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $AB - BA = [A,B]$.
   (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Montrer que $H \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. Quelle est la structure et la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$?

(c) En utilisant $[E_{i,j}, E_{j,\ell}]$, montrer que si $i \neq \ell$, $E_{i,\ell} \in H$.

(d) Montrer de même que $E_{1,1} - E_{j,j} \in H$ si $j \in \{2, \ldots, n\}$.

(e) En déduire que $\dim H \geqslant n^2 - 1$ et conclure.

5. Sommes de projecteurs.

On rappelle qu'un projecteur d'un espace vectoriel E est un endomorphisme p tel que $p^2 = p$.

Soit p_1,...,p_k des projecteurs de E_n espace vectoriel de dimension finie n. On pose

$$p = p_1 + \cdots + p_k$$

(a) Montrer que

$$p^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} p_i \circ p_j$$

(b) Montrer que si $p_i \circ p_j = 0$ pour tout i et j avec $i \neq j$, alors p est un projecteur.

(c) Réciproquement, on suppose que p est un projecteur.

i. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(p_i)$ (utiliser la trace d'un projecteur).

ii. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \subset \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i)$ puis que $\mathrm{Im}(p) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i)$.

iii. En déduire que si $i \in \{1, \ldots, k\}$, $p \circ p_i = p_i$.

iv. Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$, $x \in E$, montrer que

$$p_i(x) = p \circ p_i(x) = \sum_{j=1}^{k} p_j \circ p_i(x)$$

puis que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} p_j \circ p_i(x) = 0$$

et en déduire que pour tout j différent de i, $p_j \circ p_i(x) = 0$. Conclure.

v. Énoncer le théorème concernant la somme de projecteurs démontré.

Fin