

Exercice 1

On considère la fonction f de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que f admet des développements limités à tout ordre en 0. On note

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \quad (*)$$

3. Déterminer a_0 , a_1 et a_2 (méthode non imposée).
4. Proposer deux méthodes issues du cours pour calculer les coefficients a_n . Est-ce raisonnable et pourquoi ?
5. On se propose de calculer de manière générale a_n pour tout entier n .
 - (a) En utilisant le fait que $(1+x+x^2)f(x) = 1$ et $(*)$, montrer que

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 = 0 \\ a_k + a_{k-1} + a_{k-2} = 0, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

- (b) En déduire une expression de a_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
- (c) Calculer a_n pour $n \in \{0, \dots, 100\}$. Conclusion ?

Exercice 2

Soit f une fonction positive, continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$ avec n_0 un entier naturel.

1. (a) Montrer que

$$\forall n \geq n_0, \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$$

et que

$$\forall n \geq n_0 + 1, f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

- (b) On pose pour tout n , $n \geq n_0$

$$U_n = \sum_{k=n_0}^n f(k) - \int_{n_0}^n f(t) dt$$

Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est monotone. Montrer aussi que

$$U_n \geq \int_n^{n+1} f(t) dt$$

En déduire que la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est convergente.

(c) On pose pour tout entier naturel non nul

$$V_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad W_n = \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2}$$

Montrer que les suites (V_n) et (W_n) sont convergentes.

2. On pose pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln k}{k} \quad t_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$$

(a) Montrer que pour tout n , $n \geq 3$,

$$S_{2n} = t_n - t_{2n} + \ln 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$$

(b) En déduire une expression de S_{2n} à l'aide de W_n , W_{2n} et V_n . En déduire que (S_{2n}) converge et préciser sa limite.

(c) Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

est convergente. On utilisera (S_{2n+1}) . On note S sa somme. Est-elle absolument convergente ?

(d) Déterminer S en fonction de $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

Fin

Exercice 1

1. Le discriminant de $X^2 + X + 1$ est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et ainsi $x \mapsto 1 + x + x^2$ ne s'annule pas. Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme fraction rationnelle.
2. Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young, f admet des développements limités en 0 à tout ordre.
3. Le calcul des dérivées de f n'est pas simple dès que l'ordre est grand. On utilise plutôt la composition. On a

$$\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

et ainsi en composant avec $u = x + x^2$, $u^2 = x^2 + o(x^2)$, nous avons

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - (x+x^2) + x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x^2)$$

et donc $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $a_2 = 0$.

4. Méthode 1 : utiliser la formule de Taylor-Young ; le problème (de taille) est de calculer les dérivées jusqu'à l'ordre n .
Méthode 2 : celle utilisée dans la question précédente, mais à l'ordre n ; avec $u = x + x^2$, on doit calculer $u^2 = (x + x^2)^2$, ..., $u^n = (x + x^2)^n$ en ne gardant que les termes de degré inférieur à n : compliqué aussi.
5. (a) Nous avons

$$(1 + x + x^2)f(x) = 1$$

et ainsi

$$(1 + x + x^2) \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \right) = 1$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=0}^n a_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^n a_k x^{k+2} + o(x^n) = 1$$

puis

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k x^{k+2} + o(x^n) = 1$$

soit encore

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=1}^n a_{k-1} x^k + \sum_{k=2}^n a_{k-2} x^k + o(x^n) = 1$$

et ainsi

$$a_0 + (a_1 + a_0)x + \sum_{k=2}^n (a_k + a_{k-1} + a_{k-2})x^k + o(x^n) = 1$$

et par unicité des développements limités

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_0 + a_1 &= 0 \\ a_k + a_{k-1} + a_{k-2} &= 0, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

- (b) Ainsi la suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, avec $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -a_n - a_{n+1}$$

Son polynôme caractéristique est $X^2 + X + 1$, de discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, de racines $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm \frac{2i\pi}{3}}$. Ainsi, il existe deux constantes réelles a et b telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + b \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Or $a_0 = 1 = a$ et $a_1 = -1 = -a\frac{1}{2} - b\frac{\sqrt{3}}{2}$ et ainsi $a = 1$ et $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Donc finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

- (c) Comme $\sin$ et $\cos$ sont 2π périodiques, on a $\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$ qui sont 3 périodiques. On a donc en fait (a_n) périodique de période 3 avec

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3k \\ -1 & \text{si } n = 3k + 1 \\ 0 & \text{si } n = 3k + 2 \end{cases}$$

Exercice 2

1. (a) Soit $n \geq n_0$, si $n \leq t \leq n+1$, alors f étant décroissante,

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$$

que l'on intègre sur $[n, n+1]$ (f continue)

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$$

et ainsi de l'inégalité de droite on a

$$\forall n \geq n_0, \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$$

et de celle de gauche décalée d'un rang

$$\forall n \geq n_0 + 1, f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=n_0}^{n+1} f(k) - \sum_{k=n_0}^n f(k) - \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt + \int_{n_0}^n f(t) dt \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt \leq 0 \end{aligned}$$

d'après la question précédente. Ainsi la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante.

D'autre part, en sommant les inégalités

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$$

pour k de n_0 à n , on obtient

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k)$$

et ainsi

$$\int_{n_0}^n f(t)dt + \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k)$$

d'où

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq U_n$$

Comme la fonction f est positive, on en déduit que

$$0 \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq U_n$$

Ainsi la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est une suite décroissante minorée. Elle est donc convergente.

- (c) Ce sont des cas particuliers de la question précédente. Pour la suite $(V_n)_{n \geq 1}$, on prend la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$. La fonction f est bien continue, positive et décroissante.

Pour la suite $(W_n)_{n \geq 2}$, on prend la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $[2, +\infty[$. La fonction f est bien continue, positive. Pour la décroissance, on étudie les variations de f . La fonction f est dérivable, et on a

$$f'(x) = \left(\ln x \times \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Ainsi f est décroissante sur $[e, +\infty[$. Attention, il faut s'adapter. On obtient la décroissance de f à partir de l'entier 3 uniquement. On peut appliquer alors le résultat de la question précédente, ce qui apporte la convergence de la suite $(W'_n)_{n \geq 3}$ définie par

$$W'_n = \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2} + \frac{(\ln 3)^2}{2}$$

et ainsi la convergence aussi de la suite $(W_n)_{n \geq 2}$ puisque

$$W_n = W'_n + \frac{\ln 2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$$

2. (a) Soit $n \geq 3$, nous avons (on décompose S_{2n} , on pourrait aussi procéder à l'envers, ce qui est peut-être plus simple)

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln 2 + \ln k}{k} - t_{2n} \\ &= \ln 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + t_n - t_{2n} \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= t_n - t_{2n} + \ln 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \\
&= W_n + \frac{(\ln n)^2}{2} - W_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2} + \ln 2(V_n + \ln n) \\
&= W_n - W_{2n} + \ln(2)V_n + \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 2 + \ln n)^2}{2} + \ln 2 \ln n \\
&= W_n - W_{2n} + \ln(2)V_n - \frac{(\ln 2)^2}{2}
\end{aligned}$$

Comme (W_n) et (V_n) convergent, on en déduit que (S_{2n}) est convergente, de limite

$$\ell = \ln(2)\gamma - \frac{\ln(2)^2}{2}$$

(c) Or nous avons

$$S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$$

qui converge donc aussi vers ℓ . Ainsi les suites des termes d'ordre pair et des termes d'ordre impair convergent vers la même limite ℓ et ainsi (S_n) est aussi convergente vers ℓ .

On peut aussi utiliser le critère spécial des séries alternée. La suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 3}$ est décroissante, positive, et converge vers 0. Ainsi d'après le critère spécial des séries alternées de Leibniz, la série $\sum_{n \geq 3} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente et ainsi la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ aussi. Par contre, comme pour $n \geq 3$, on a

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$$

la série n'est pas absolument convergente.

(d) On a donc

$$S = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$