Quinzaine 3 du 13/10 au 07/11

Chapitre 2 : *Espaces vectoriels - Révisions compléments*
Base $(L_0, \dots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs élémentaires de Lagrange en $n+1$ points distincts $a_0, \dots, a_n$ de $\mathbb{K}$ avec

$$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$$

Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base, $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.

La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminants. Exemples et calculs de déterminants.
Déterminant de Vandermonde (*). Lien entre déterminant de Vandermonde et l'interpolation de Lagrange.

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \oplus E_i$.
Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^{p} F_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.
Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme.
Si u et v commutent, alors le noyau de u (ainsi que l'image de u) est stable par v (*).
Le noyau de $P(u)$ est stable par u.

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition). Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
Exemples d'opérations par blocs.

Chapitre 3 : *Suites et séries de fonctions*
Suite de fonctions. Convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) vers une fonction f sur un intervalle I (ou éventuellement une réunion d'intervalles).

Exemples (*) des suites de fonctions $(x \mapsto x^n)$, $(x \mapsto x\mathrm{e}^{-nx})$, de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 2n - n^2x & x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & x \geqslant \frac{2}{n} \end{cases}$$

Représentations.
Problématique de la convergence simple :
– la continuité n'est pas compatible avec la convergence simple.
– l'intégration sur un segment n'est pas compatible avec la convergence simple.

Questions de cours :

— Les énoncés des définitions, des théorèmes.
— Les démonstrations marquées par (*).
— Les méthodes usuelles sur des exemples.