

Devoir en temps libre n°2

1. Quelques résultats préliminaires.

- (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$.
- (b) Existe-t-il $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?
- (c) On considère les matrices E_{i_0, j_0} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définies par

$$E_{i_0, j_0} = (\delta_{i_0}^i \delta_{j_0}^j)_{1 \leq i, j \leq n}$$

c'est à dire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i_0 et colonne j_0 qui vaut 1.

Vérifier que

$$E_{i, j} E_{k, \ell} = \delta_j^k E_{i, \ell} \quad (*)$$

On donnera quelques exemples concrets de cette propriété pour bien asseoir cette formule.

2. Soit θ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$) telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \theta(AB) = \theta(BA).$$

- (a) Montrer que si $i \neq \ell$, on a $\theta(E_{i, \ell}) = 0$. On utilisera le produit $E_{i, j} E_{j, \ell}$.
- (b) Montrer que pour tout i et j , $\theta(E_{i, i}) = \theta(E_{j, j})$. On pose α ce scalaire commun.
- (c) Montrer que $\theta = \alpha \text{Tr}$.
- (d) En déduire que $\{\theta \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) / \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \theta(AB) = \theta(BA)\}$ est une droite vectorielle de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ dont on donnera un vecteur directeur.

3. Un produit scalaire pas si nouveau que ça.

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$(A|B) = \text{Tr}(AB^T)$$

- (a) Montrer que $(\quad | \quad)$ est symétrique et bilinéaire. On n'utilisera pas les coefficients des matrices A et B .
- (b) Les propriétés de positivité et du caractère défini posent problème. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$, calculer $(A|B) = \text{Tr}(AB^T)$ en fonction des coefficients de A et de B .
Que reconnaît-on ? Conclure.
- (c) Justifier que les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et rappeler la décomposition d'une matrice A sur ces deux sous-espaces supplémentaires.

4. On considère l'ensemble H des combinaisons linéaires des matrices de la forme

$$AB - BA$$

où $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $AB - BA = [A, B]$.

- (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (b) Montrer que $H \subset \text{Ker}(\text{Tr})$. Quelle est la structure et la dimension de $\text{Ker}(\text{Tr})$?
- (c) En utilisant $[E_{i,j}, E_{j,\ell}]$, montrer que si $i \neq \ell$, $E_{i,\ell} \in H$.
- (d) Montrer de même que $E_{1,1} - E_{j,j} \in H$ si $j \in \{2, \dots, n\}$.
- (e) En déduire que $\dim H \geq n^2 - 1$ et conclure.

5. Sommes de projecteurs.

On rappelle qu'un projecteur d'un espace vectoriel E est un endomorphisme p tel que $p^2 = p$.

Soit $p_1, \dots, p_k$ des projecteurs de E_n espace vectoriel de dimension finie n . On pose

$$p = p_1 + \dots + p_k$$

- (a) Montrer que

$$p^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i \circ p_j$$

- (b) Montrer que si $p_i \circ p_j = 0$ pour tout i et j avec $i \neq j$, alors p est un projecteur.
- (c) Réciproquement, on suppose que p est un projecteur.

i. Montrer que $\text{rg}(p) = \sum_{i=1}^k \text{rg}(p_i)$ (utiliser la trace d'un projecteur).

ii. Montrer que $\text{Im}(p) \subset \sum_{i=1}^k \text{Im}(p_i)$ puis que $\text{Im}(p) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Im}(p_i)$.

iii. En déduire que si $i \in \{1, \dots, k\}$, $p \circ p_i = p_i$.

iv. Soit $i \in \{1, \dots, k\}$, $x \in E$, montrer que

$$p_i(x) = p \circ p_i(x) = \sum_{j=1}^k p_j \circ p_i(x)$$

puis que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k p_j \circ p_i(x) = 0$$

et en déduire que pour tout j différent de i , $p_j \circ p_i(x) = 0$. Conclure.

v. Énoncer le théorème concernant la somme de projecteurs démontré.

Fin

1. Quelques résultats préliminaires.

- (a) Comme la trace est la somme des éléments diagonaux, la trace est invariante par transposition puisque la diagonale l'est. Au besoin, techniquement : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a $A^T = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $b_{i,j} = a_{j,i}$. Ainsi

$$\text{Tr}(A^T) = \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \text{Tr}(A).$$

On a donc bien $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$.

- (b) Si il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$, on aurait

$$\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(I_n) = n$$

Or on sait que $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA)$ par linéarité, puis sachant que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, on obtient que $n = 0$, ce qui est contradictoire. Donc il n'existe pas de matrices A et B telles que $AB - BA = I_n$.

- (c) On peut présenter les tableaux, faire le produit graphiquement pour aboutir.

On procède ici techniquement : on écrit $A = E_{i_0, j_0}$ $B = E_{k_0, \ell_0}$ avec

$$a_{i,j} = \delta_{i_0}^i \delta_{j_0}^j \quad b_{i,j} = \delta_{k_0}^i \delta_{\ell_0}^j$$

et on pose $C = AB$ avec la formule usuelle

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

et ainsi en remplaçant

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{i_0}^i \delta_{j_0}^k \delta_{k_0}^k \delta_{\ell_0}^j$$

que l'on simplifie (il reste de la somme le terme pour $k = j_0$)

$$c_{i,j} = \delta_{i_0}^i \delta_{k_0}^{j_0} \delta_{\ell_0}^j = \delta_{k_0}^{j_0} \delta_{i_0}^i \delta_{\ell_0}^j$$

et on reconnaît donc $C = \delta_{k_0}^{j_0} E_{i_0, \ell_0}$. Ainsi on a bien

$$E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_j^k E_{i,\ell} \quad (*)$$

2. Soit θ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$) telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \theta(AB) = \theta(BA).$$

- (a) Si $i \neq \ell$, on utilise le produit $E_{i,j} E_{j,\ell}$, on a

$$E_{i,j} E_{j,\ell} = E_{i,\ell} \quad E_{j,\ell} E_{i,j} = 0$$

et ainsi $\theta(E_{i,j} E_{j,\ell}) = \theta(0) = 0$, soit encore $\theta(E_{i,\ell}) = 0$.

- (b) Soit i et j , on a

$$E_{i,j} E_{j,i} = E_{i,i} \quad E_{j,i} E_{i,j} = E_{j,j}$$

et ainsi comme $\theta(E_{i,j} E_{j,i}) = \theta(E_{j,i} E_{i,j})$, on a bien $\theta(E_{i,i}) = \theta(E_{j,j})$. On pose α ce scalaire commun.

- (c) Deux applications linéaires sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base. Ici, nous avons si $i \neq \ell$

$$\theta(E_{i,\ell}) = 0 = \text{Tr}(E_{i,\ell})$$

et

$$\theta(E_{i,i}) = \alpha = \alpha \text{Tr}(E_{i,\ell})$$

Donc θ et αTr sont deux applications linéaires qui coïncident sur la base canonique, et donc $\theta = \alpha \text{Tr}$.

- (d) On a donc prouvé l'inclusion $\{\theta \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) / \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \theta(AB) = \theta(BA)\} \subset \text{Vect}(\text{Tr})$.

L'inclusion réciproque étant évidente, on a bien une droite vectorielle de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ dont un vecteur directeur est Tr .

3. Un produit scalaire pas si nouveau que ça.

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$(A|B) = \text{Tr}(AB^T)$$

- (a) Soit A, B deux matrices, nous avons

$$(A|B) = \text{Tr}(AB^T) = \text{Tr}((AB^T)^T) = \text{Tr}(BA^T) = (B|A)$$

et si A, B, C sont trois matrices, λ, μ des scalaires,

$$\begin{aligned} (\lambda A + \mu B|C) &= \text{Tr}((\lambda A + \mu B)C^T) = \text{Tr}(\lambda AC^T + \mu BC^T) \\ &= \lambda \text{Tr}(AC^T) + \mu \text{Tr}(BC^T) = \lambda(A|C) + \mu(B|C) \end{aligned}$$

Ainsi $(\cdot | \cdot)$ est symétrique et bilinéaire. Nous n'avons pas besoin d'utiliser le passage par les coefficients des matrices A et B .

- (b) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, $C = B^T = (c_{i,j})$, avec $c_{i,j} = b_{j,i}$. Ainsi

$$(A|B) = \text{Tr}(AB^T) = \text{Tr}(AC) = \text{Tr}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}c_{k,j}\right) = \text{Tr}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{j,k}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{i,k}$$

On reconnaît le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$ en identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$. La question précédente s'avère inutile.

- (c) Montrons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme directe des sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

– analyse : si $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique. Alors

$$M = S + A \quad M^T = S - A$$

et ainsi on en déduit que forcément (conditions nécessaires)

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \quad A = \frac{1}{2}(M - M^T)$$

– réciproquement (synthèse), en posant

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \quad A = \frac{1}{2}(M - M^T)$$

on constate que $M = S + A$ et que S symétrique et A antisymétrique puisque

$$S^T = \frac{1}{2}(M^T + M) = S \quad A^T = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A$$

Ainsi les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques sont deux sous-espaces supplémentaires. On vérifie qu'ils sont orthogonaux : si S symétrique et A antisymétrique, on a

$$(S|A) = \text{Tr}(SA^T) = -\text{Tr}(SA) = -\text{Tr}(AS) = -\text{Tr}((AS)^T) = -\text{Tr}(SA^T) = -(S|A)$$

et ainsi $(S|A) = 0$.

Ainsi les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

4. On considère l'ensemble H des combinaisons linéaires des matrices de la forme

$$AB - BA$$

où $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $AB - BA = [A, B]$.

(a) Par définition, $H \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et H non vide car $0 = 0.0 - 0.0 \in H$.

Soit M et N deux éléments de H , λ et μ deux scalaires, on peut écrire

$$M = \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i B_i - B_i A_i) \quad N = \sum_{i=n+1}^m \alpha_i (A_i B_i - B_i A_i)$$

et ainsi

$$\lambda M + \mu N = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i (A_i B_i - B_i A_i) + \sum_{i=n+1}^m \mu \alpha_i (A_i B_i - B_i A_i)$$

qui est donc une combinaison linéaire de matrices de la forme $AB - BA$, donc appartient à H .

Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Si $M \in H$, M est de la forme

$$M = \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i B_i - B_i A_i)$$

et ainsi par les propriétés de la trace

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{Tr}(A_i B_i - B_i A_i) = 0$$

Ainsi on a bien $H \subset \text{Ker}(\text{Tr})$.

Comme Tr est une forme linéaire non nulle, $\text{Ker}(\text{Tr})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire un sous-espace vectoriel de dimension $n^2 - 1$.

(c) On a si $i \neq \ell$,

$$[E_{i,j}, E_{j,\ell}] = E_{i,j} E_{j,\ell} - E_{j,\ell} E_{i,j} = E_{i,\ell} - 0 = E_{i,\ell}$$

et donc si $i \neq \ell$, $E_{i,\ell} \in H$.

(d) On a

$$[E_{1,j}, E_{j,1}] = E_{1,j} E_{j,1} - E_{j,1} E_{1,j} = E_{1,1} - E_{j,j}$$

Ainsi $E_{1,1} - E_{j,j} \in H$ si $j \in \{2, \dots, n\}$.

- (e) La famille constituée des matrices $E_{i,\ell}$, $i \neq \ell$ et $E_{1,1} - E_{j,j}$, $j \neq 1$ est libre, et ainsi $\dim H \geq n^2 - 1$ et comme $H \subset \text{Ker}(\text{Tr})$, $\dim \text{Ker} \text{Tr} = n^2 - 1$, on a finalement $H = \text{Ker}(\text{Tr})$.

5. Sommes de projecteurs.

On rappelle qu'un projecteur d'un espace vectoriel E est un endomorphisme p tel que $p^2 = p$.

Soit $p_1, \dots, p_k$ des projecteurs de E_n espace vectoriel de dimension finie n . On pose

$$p = p_1 + \dots + p_k$$

- (a) On a par linéarité de p ,

$$p \circ p = \left(\sum_{i=1}^k p_i \right) \circ p = \sum_{i=1}^k p_i \circ p = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i \circ p_j$$

- (b) Si $p_i \circ p_j = 0$ pour tout i et j avec $i \neq j$, alors

$$p \circ p = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i \circ p_j = \sum_{i=1}^k p_i^2 = \sum_{i=1}^k p_i = p$$

et donc p qui est linéaire par somme d'endomorphisme est bien un projecteur.

- (c) Réciproquement, on suppose que p est un projecteur.

- i. Comme p est un projecteur, et $p_1, \dots, p_k$ aussi, on a

$$\text{rg}(p) = \text{Tr}(p) = \sum_{i=1}^k \text{Tr}(p_i) = \sum_{i=1}^k \text{rg}(p_i)$$

$$\text{Ainsi } \text{rg}(p) = \sum_{i=1}^k \text{rg}(p_i).$$

- ii. Soit $y \in \text{Im}(p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ et ainsi

$$y = \sum_{i=1}^k p_i(x) \in \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$$

$$\text{On a donc l'inclusion } \text{Im}(p) \subset \sum_{i=1}^k \text{Im}(p_i).$$

Ainsi,

$$\dim \text{Im}(p) \leq \dim \sum_{i=1}^k \text{Im}(p_i) \leq \sum_{i=1}^k \dim \text{Im}(p_i)$$

Or d'après la question précédente, on a

$$\dim \text{Im}(p) = \sum_{i=1}^k \dim \text{Im}(p_i)$$

et on en déduit que forcément

$$\dim \sum_{i=1}^k \text{Im}(p_i) = \sum_{i=1}^k \dim \text{Im}(p_i)$$

et donc la somme est directe, et finalement que l'inclusion $\text{Im}(p) \subset \sum_{i=1}^k \text{Im}(p_i)$ est une égalité.

Finalement, on a $\text{Im}(p) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Im}(p_i)$.

- iii. Soit $i, x \in E$, $p_i(x) \in \text{Im}(p_i) \subset \bigoplus_{j=1}^k \text{Im}(p_j) = \text{Im}(p)$ et donc comme p projecteur, $p(p_i(x)) = p_i(x)$. Ainsi $p \circ p_i = p_i$.
- iv. Soit $i \in \{1, \dots, k\}$, $x \in E$, on a

$$p_i(x) = p(p_i(x)) = \sum_{j=1}^k p_j(p_i(x)) = \sum_{j=1}^k p_j \circ p_i(x)$$

puis en isolant le terme en i , sachant que $p_i^2 = p_i$,

$$p_i(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k p_j \circ p_i(x) + p_i(x)$$

soit en simplifiant

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \underbrace{p_j \circ p_i(x)}_{\in \text{Im}(p_j)} = 0$$

Nous avons alors une décomposition du vecteur 0 sur la somme directe $\bigoplus_{j=1}^k \text{Im}(p_j)$,

et il s'agit donc de la décomposition triviale, et donc pour tout j différent de i , on a $p_j \circ p_i(x) = 0$, et comme cela est vrai pour tout x de E , on a $p_j \circ p_i = 0$.

- v. On a donc démontré le résultat suivant : la somme $p_1 + \dots + p_k$ de projecteurs est un projecteur si et seulement si

$$\forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0$$