Devoir surveillé n°2
3 heures

Cours

On considère les séries numériques $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ avec

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que $u_n \sim v_n$.
2. Montrer que $\sum u_n$ est convergente ; que dire de la série $\sum v_n$? Conclusion ?

Vrai – Faux

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Lorsque la suite (u_n) converge vers 0, la série $\sum u_n$ est convergente.
2. La série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente.
3. Lorsque la série $\sum u_n$ est convergente, la série $\sum u_n^2$ aussi.
4. Soit $q \in \mathbb{C}$, la série $\sum q^{2n}$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
5. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+\mathrm{e}^n}$ est divergente.
6. Si une série ne converge pas absolument, alors elle ne converge pas.
7. La série produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geqslant 0} 1$ avec la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n}$ est convergente.

Exercice

Pour tout $a > 0$, on considère la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+a}$$

1. Soit $a > 0$. Démontrer que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+a}$ est convergente.

   Est-elle absolument convergente ?

   On pose ainsi si $a > 0$,

   $$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a}$$

   On pose aussi les sommes partielles et restes d'ordre n :

   $$S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+a} \qquad R_n(a) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+a}$$

2. Quel est le signe de $R_n(a)$? Justifier que l'on a

$$|R_n(a)| \leqslant \frac{1}{n+1+a}$$

3. En déduire que la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n+1} R_n(a)$$

est convergente pour tout $a > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

4. Soit $a > 0$. Montrer que l'on a $|f(a)| \leqslant \frac{1}{a}$. En déduire la limite de f en $+\infty$. Quel est le signe de $f(a)$?

5. Soit $a > 0$ et h de sorte que $a + h > 0$. Montrer que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)(n+a+h)}$$

puis en justifiant l'existence des sommes infinies si nécessaire que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)^2} = h \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2(n+a+h)}$$

En déduire que

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)^2} \right| \leqslant \frac{h}{a^2(a+h)}$$

6. Montrer alors que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a

$$f'(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)^2}$$

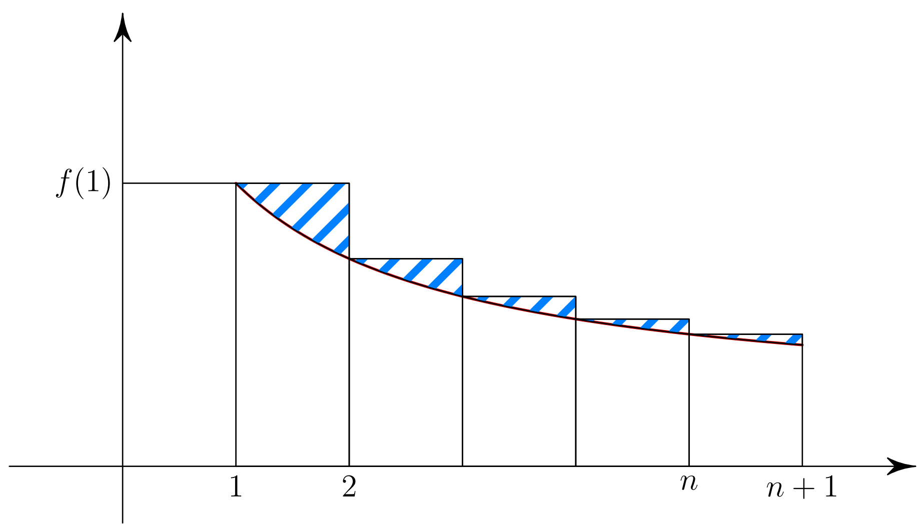
et en déduire le signe de $f'(a)$. Conclusion ?

7. Soit $a > 0$, on écrit $f(a) = \frac{1}{a} + R_0(a)$. Justifier que f tend vers $+\infty$ lorsque a tend vers 0^+.

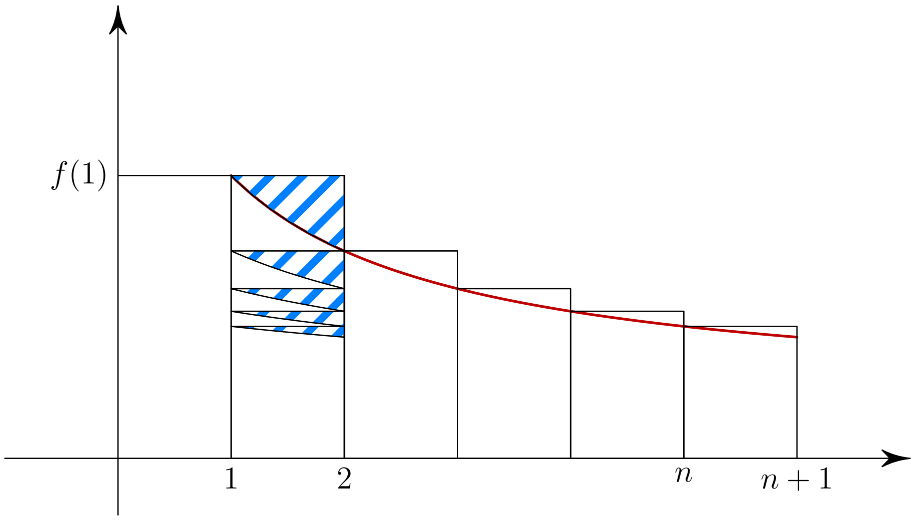
8. Construire le graphe de la fonction f en tenant compte des propriétés établies précédement.

Problème

Soit $f : [1, +\infty[$ une fonction continue, positive et décroissante, de limite nulle en $+\infty$.



On se propose de démontrer cette remarque géométrique : si, on accumule les erreurs commises en remplaçant les surfaces associées à la courbe par les surfaces associées aux rectangles situés au-dessus de la courbe, dans le premier rectangle entre 1 et 2 (par exemple), on constate que l'on obtient une suite croissante, majorée par la surface du premier rectangle soit $f(1)$, qui donc sera convergente vers une constante notée γ_f, sans autre condition (la convergence ou non de la série $\sum f(n)$ étant visiblement sans influence).



On pose (erreur élémentaire)

$$a_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$$

et (somme des erreurs élémentaires)

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k)$$

2. En déduire que pour tout entier k non nul, on a

$$0 \leqslant a_k \leqslant f(k) - f(k+1)$$

3. En déduire que

$$0 \leqslant A_n \leqslant f(1) - f(n+1) \leqslant f(1)$$

   et que la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
4. Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
5. Montrer que la suite (A_n) converge vers une limite que l'on notera γ_f.
6. Montrer que si $n \geqslant 2$,

$$A_{n-1} = f(1) + \cdots + f(n-1) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

7. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \gamma_f + \mathrm{o}(1)$$

8. En déduire que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que si l'on note dans ce cas $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ cette limite, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \gamma_f$$

9. En déduire qu'il existe une constante[1] γ réelle telle que

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Montrer que $1 - \ln 2 < \gamma$ et que $H_n \sim \ln(n)$.

10. En déduire de même que si $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, il existe une constante C_α telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}} + C_\alpha + \mathrm{o}(1)$$

Que peut-on en déduire si $\alpha > 1$? si $\alpha \in]0,1[$? (on suppose non connu les résultats sur les séries de Riemann).

11. Soit $\alpha > 0$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

(a) Montrer que si $n \geqslant 1$, on a

$$S_{2n} = T_{2n} - \frac{1}{2^{\alpha-1}} T_n$$

(b) Pour $\alpha = 1$, en remarquant que $T_n = H_n$, montrer que

$$S_{2n} = \ln(2n) - \ln(n) + \mathrm{o}(1)$$

et conclure que (S_{2n}) converge vers $\ln(2)$.
Montrer que (S_{2n+1}) converge aussi vers $\ln(2)$ et conclure.

(c) Pour $\alpha \neq 1$, montrer que

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) C_\alpha + \mathrm{o}(1)$$

En déduire que (S_n) converge vers $A_\alpha = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) C_\alpha$.

(d) Justifier que si $\alpha > 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. il s'agit de la constante γ d'Euler-Mascheroni

Cours

On considère les séries numériques $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ avec

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

1. On a

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{o}(u_n)$$

et ainsi $u_n \sim v_n$. On peut aussi montrer que $\frac{v_n}{u_n} \longrightarrow 1$:

$$\frac{v_n}{u_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \longrightarrow 1$$

2. La série $\sum u_n$ converge, puisqu'elle satisfait les conditions du critère spécial des séries alternées de Leibniz. Par contre, si $\sum v_n$ était convergente, on aurait $\sum v_n - u_n$ qui le serait aussi, c'est la série $\sum \frac{1}{n}$ qui serait convergente, ce qui n'est pas le cas. Ainsi la série $\sum v_n$ est divergente.

Ainsi, pour des séries dont les termes ne sont pas de signe constant (à partir d'aucun rang), l'équivalence n'est pas comptatible avec la convergence.

Vrai – Faux

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Lorsque la suite (u_n) converge vers 0, la série $\sum u_n$ est convergente. FAUX, avec par exemple $\sum \frac{1}{n}$.
2. La série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente. VRAI puisque par exemple, si $n \geqslant 2$, on a $0 \leqslant \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$.
3. Lorsque la série $\sum u_n$ est convergente, la série $\sum u_n^2$ aussi. FAUX avec $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.
4. Soit $q \in \mathbb{C}$, la série $\sum q^{2n}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. VRAI puisque $q^{2n} = (q^2)^n$ et que $|q^2| < 1 \iff |q| < 1$.
5. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+\mathrm{e}^n}$ est divergente. FAUX, on a

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+\mathrm{e}^n}\right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{-n}$$

et la série géométrique $\sum \mathrm{e}^{-n}$ est convergente. Nous avons donc la convergence absolue, donc la convergence. On peut aussi procéder avec le critère spécial des séries alternées.

6. Si une série ne converge pas absolument, alors elle ne converge pas. FAUX, avec $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
7. La série produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geqslant 0} 1$ avec la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n}$ est convergente. FAUX puisque le produit de Cauchy est $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k} \times 1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{-1}} \longrightarrow \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} \neq 0$$

Exercice

1. Soit $a > 0$. La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+a}$ est alternée, et son terme général, en valeur absolue, qui est $\frac{1}{n+a}$ décroit vers 0. Ainsi d'après le critère spécial des séries alternées, la série est bien convergente.
   Comme on a
   $$\frac{1}{n+a} \sim \frac{1}{n} > 0$$
   et sachant que la série de Riemann (série harmonique) $\sum \frac{1}{n}$ diverge, par comparaison par équivalence (termes positifs) la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n+a}$ diverge et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+a}$ n'est pas absolument convergente.
2. De plus, d'après le critère spécial des séries alternées, le signe de $R_n(a)$ est celui du son permier terme $\frac{(-1)^n}{n+1+a}$, et on a aussi la majoration en valeur absolue par son premier terme, soit
   $$|R_n(a)| \leqslant \frac{1}{n+1+a}$$
3. Pour tout $a > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a
   $$\left|\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n+1} R_n(a)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+1+a)} \sim \frac{1}{n^2}$$
   ] et on en déduit par comparaison licite que la série numérique
   $$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n+1} R_n(a)$$
   est absluement convergente donc convergente.
4. Soit $a > 0$. Toujours avec la majoration spéciale des séries alternée, on a
   $$|f(a)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a}\right| \leqslant \frac{1}{a}$$
   On en déduit que f tend vers 0 en $+\infty$.

   De plus, le signe de $f(a)$ est celui du permier terme $\frac{1}{a}$, donc positif.
5. Soit $a > 0$ et h non nul de sorte que $a + h > 0$. On a
   $$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a+h} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a}\right] \\ &= \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n[n+a-(n+a+h)]}{(n+a+h)(n+a)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)(n+a+h)}\end{aligned}$$
   Par le critère spécial des séries alternées, la série
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)^2}$$

converge, et ainsi on a

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)(n+a+h)}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)^2}\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{(n+a)(n+a+h)}-\frac{1}{(n+a)^2}\right]\\ &= h\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2(n+a+h)}\end{aligned}$$

Ainsi en utilisant la majoration spéciale des séries alternées, licite ici, on majore par le premier terme en valeur absolue

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)^2}\right|\leqslant\frac{h}{a^2(a+h)}$$

6. On obtient alors que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)^2}\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

ce qui signifie que f est dérivable en a avec $f'(a)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)^2}$. Ainsi f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a

$$f'(a)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+a)^2}$$

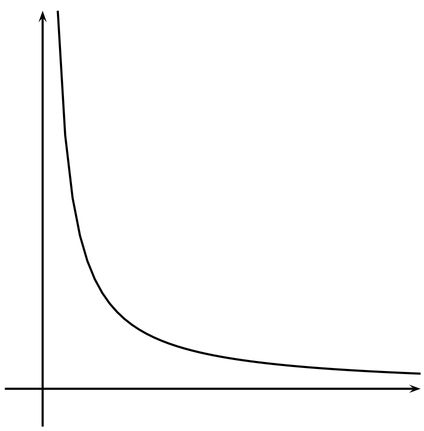
Toujours avec le critère spécial des séries alternées, $f'(a)$ est du signe de $-\frac{1}{a^2}$, et donc $f'<0$ ce qui permet d'en déduire que la fonction f est strictement décroissante.

7. Soit $a>0$, on écrit $f(a)=\frac{1}{a}+R_0(a)$ et comme on a la majoration spéciale

$$|R_0(a)|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+a}\right|\leqslant\frac{1}{1+a}$$

on obtient que f tend vers $+\infty$ lorsque a tend vers 0^+.

8. En tenant compte des propriétés établies précédement, on obtient le graphe de la fonction f (allure) :



Problème

1. Si f est décroissante, soit $x \in [k, k+1]$,

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$$

que l'on intègre sur $[k, k+1]$

$$f(k+1) \times 1 \leqslant \int_k^{k+} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k) \times 1.$$

2. Soit k un entier non nul, on a

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k)$$

d'après la question précédente, d'où en retranchant $f(k)$

$$f(k+1) - f(k) \leqslant -a_k \leqslant 0$$

soit encore

$$0 \leqslant a_k \leqslant f(k) - f(k+1).$$

3. Ainsi par sommation, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} (f(k) - f(k+1))$$

soit encore par télescopage

$$0 \leqslant A_n \leqslant f(1) - f(n+1) \leqslant f(1).$$

Ainsi la suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée (minorée par 0 et majorée par $f(1)$).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A_{n+1} - A_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} \geqslant 0$$

Donc la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

5. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante et majorée, on en déduit par le théorème de convergence monotone qu'elle converge, vers une limite que l'on note γ_f.

6. Soit $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k &&= \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &= f(1) + \cdots + f(n-1) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

7. Ainsi on a

$$f(1) + \cdots + f(n) = A_{n-1} + f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

et comme (A_{n-1}) converge vers γ_f, et $(f(n))$ vers 0, on a

$$A_{n-1} = \gamma_f + \mathrm{o}(1) \qquad f(n) = \mathrm{o}(1)$$

et ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \gamma_f + \mathrm{o}(1)$$

8. Ainsi si la suite $\left(\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, comme $\mathrm{o}(1)$ converge vers 0, on obtient que la suite $\left(\sum_{k=1}^n f(k)\right)$ converge et on a donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) = \lim_{nto+\infty} \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \gamma_f$$

Réciproquement, si la suite $(\sum_{k=1}^n f(k))$ converge, on a la suite $\left(\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $\sum_{k=1}^n f(k) - \gamma_f$.

Ainsi la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et on a dans ce cas

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \gamma_f$$

9. On considère la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ positive continue décroissante vers 0 sur $[1, +\infty[$. D'après la question 7, il existe une constant γ de sorte que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x}_{=\ln(n)} + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Donc il existe une constante[2] γ réelle telle que

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante vers γ, et même en fait strictement croissante puisque on peut justifier que $a_k > 0$, on a $A_1 = a_1 = 1 - \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1 - \ln 2 < \gamma$.

10. Si $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est positive décroissante vers 0, et on a

$$\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}$$

il existe une constante γ_α telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + \mathrm{o}(1)$$

et donc il existe une constante C_α telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}} + C_\alpha + \mathrm{o}(1)$$

Lorsque $\alpha > 1$, comme $\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \longrightarrow 0$, on en déduit la convergence de la série de Riemann avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = C_\alpha$$

2. il s'agit de la constante γ d'Euler-Mascheroni

Par contre, si $\alpha \in]0,1[$, comme $\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \longrightarrow +\infty$, on en déduit la divergence de la série de Riemann avec en plus

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

11. Soit $\alpha > 0$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

(a) Soit $n \geqslant 1$, on a en séparant les termes positifs des termes négatifs

$$\begin{aligned} S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^\alpha} \\ &= T_{2n} - \frac{1}{2^{\alpha-1}} T_n \end{aligned}$$

(b) Pour $\alpha = 1$, on remarque que $T_n = H_n$, on a

$$S_{2n} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + \mathrm{o}(1) = \ln(2n) - \ln(n) + \mathrm{o}(1) = \ln(2) + \mathrm{o}(1)$$

Ainsi (S_{2n}) converge vers $\ln(2)$.

Comme $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha}$, (S_{2n+1}) converge aussi vers $\ln(2)$ et ainsi par théorème (S_n) converge aussi vers $\ln(2)$. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

(somme alternée des inverses des entiers)

(c) Soit $\alpha \neq 1$, on a alors

$$S_{2n} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(2n)^{\alpha-1}} + C_\alpha - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - C_\alpha\right] + \mathrm{o}(1)$$

et ainsi

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) C_\alpha + \mathrm{o}(1)$$

On en déduit que (S_{2n}) converge vers $A_\alpha = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) C_\alpha$ puis comme ci-dessus, que (S_n) aussi.

(d) Dans le cas où $\alpha > 1$, on obtient donc la relation entre la somme de Riemann et la somme de Riemann alternée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$