Devoir surveillé n°3
3 heures

Exercice 1 : énigme du berger

Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante de son troupeau : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Mais comment a-t-il fait ?

1. (a) On souhaite montrer par récurrence sur la taille de la matrice, que le déterminant de toute marice carré, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair. Pour cela on pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « une matrice carré de taille n, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est de déterminant un nombre impair », pour $n \geqslant 1$.

   On suppose connu le fait qu'une matrice de coefficients entiers admet un déterminant entier (récurrence immédiate sur la taille de la matrice).

   i. Vérifier $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$.

   ii. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour un certain entier n, avec $n \geqslant 1$.
   Soit A une matrice carrée de taille $n+1$ dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs. On note

   $$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & L \\ C & B \end{pmatrix}$$

   où B est carrée de taille n, L une ligne de taille n et C une colonne de taille n.
   Montrer que

   $$\det(A) = a_{1,1}\det(B) + 2p$$

   avec p entier et en déduire que $\det(A)$ est un entier impair.

   iii. Conclure.

   (b) En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.

2. On note B la matrice carrée de taille 101 construite de la façon suivante : les moutons sont numérotés de 1 à 101.
   Lorsque le berger retire le mouton i du troupeau, il sépare alors le reste du troupeau en deux sous-troupeau A et B égaux (en nombre) et de même poids. On note $B_{i,j}$ les coefficients de la ligne i et colonne j définis par

   $$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si le mouton } j \text{ se trouve dans } A \\ 2 & \text{si le mouton } j \text{ se trouve dans } B \end{cases}$$

   On note X la matrice colonne de taille 101 constituées des poids des moutons.
   On note M le poids total du troupeau.

(a) Calculer BU avec U la matrice colonne de taille 101 de coefficients tous égaux à 1.

(b) Calculer BX.

(c) Montrer que B est inversible.

(d) En déduire X et résoudre l'énigme du berger.

Exercice II (un peu devoir maison)

On note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice de coefficients tous nuls sauf à la ligne i et colonne j où le coefficient vaut 1, soit encore

$$E_{i_0,j_0} = \left(\delta_i^{i_0}\delta_j^{j_0}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer AE_{i_0,j_0} puis $\mathrm{Tr}(AE_{i_0,j_0})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que si $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AX) = 0$ alors $A = 0$.
3. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{K})$, montrer que si $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$ alors $A = B$.

Exercice III : de la liberté dans le monde

Soit $a_0, \ldots, a_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$, on considère la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ définie par

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}\,,\ P_i = (X - a_i)^n$$

On souhaite démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

1. Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$. Quel est le degré de P_i ?
2. On suppose qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X - a_i)^n = 0 \qquad (*)$$

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^n = 0$

(b) En dérivant (*), montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^{n-1} = 0$.

(c) Montrer que

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}\,,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^p = 0.$$

(d) En déduire que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(e) Justfier que A est inversible. Conclure.

(f) Existe-t-il des bases de $\mathbb{K}_n[X]$ dont tous les polynômes ont le même degré ? Quel est ce degré forcément ?

Exercice IV : de la stabilité et de la droiture

Soit u un endomorphisme de E_n espace vectoriel de dimension n.

1. Soit D une droite stable par u, avec $D = \mathrm{Vect}(e)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e) = \lambda e$.
2. On suppose que $E_n = \bigoplus_{i=1}^{n} D_i$ et que D_1,...,D_n sont stables par u. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de sorte que la matrice de u dans cette base soit diagonale, c'est à dire

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(u) = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   On dit que u est diagonalisable ; les termes diagonaux de D sont appelés les valeurs propres de u.
3. Réciproquement, montrer que si u est diagonalisable, alors il existe des droites D_1,..., D_n stables par u de sorte que $E_n = \bigoplus_{i=1}^{n} D_i$.
4. Justifier que les endomorphismes suivants sont diagonalisables selon la définition ci-dessus :
   – $u = 0$ l'endomorphisme nul ;
   – $u = \mathrm{id}_{E_n}$ l'endorphisme identité ;
   – $u = \alpha \mathrm{id}_{E_n}$ l'homothétie vectorielle de rapport α.

Exercice V (cours et plus si affinité)

On considèreuna matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifiant $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_p = 0$.

1. Déterminer un polynôme noté P annulateur de A de degré 3 unitaire.
2. Vérifier que $P = (X-1)^2(X-2)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^n par P, écrite de manière classique $X^n = (X-1)^2(X-2)Q + a_nX^2 + b_nX + c_n$ (*).
   (a) Montrer que
   $$\begin{cases} 1 & = a_n + b_n + c_n \\ 2^n & = 4a_n + 2b_n + c_n \end{cases}$$
   (b) En dérivant (*), montrer que $n = 2a_n + b_n$.
   (c) En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   (d) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ A^n = (2^n - n - 1)A^2 + (3n + 2 - 2^{n+1})A + (2^n - 2n)I_p \qquad (1)$$
   (e) Montrer que A est inversible et préciciser A^{-1} en fonction de A^2, A et I_p. La formule (1) est-elle encore vraie si $n = -1$?
   (f) (***) Montrer que (1) en encore vraie si $n \in \mathbb{Z}$ (plusieurs méthodes sont possibles).

Exercice VI

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n)$ une famille de $n+1$ réels deux à deux distincts. On note pour tout i de 0 à n, L_i le polynôme élémentaire d'interpollation de Lagrange

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

On considère l'application $(\cdot|\cdot)$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par

$$(P|Q) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$$

1. Rappeler la valeur de $L_i(a_j)$ pour tout i et j entre 0 et n.
2. Vérifier que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que pour tout i entre 0 et n, $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$(L_i|P) = P(a_i).$$

4. Calculer $(L_i|L_j)$ pour tout i et j de $\{0, \ldots, n\}$. En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base $(L_0, \ldots, L_n)$.
5. Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$, préciser le coefficient de X^n du polynôme L_i.
   En déduire que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{P(a_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j)} = 0.$$