Devoir en temps libre n°3

On pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$$

et pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$$

1. Montrer que la fonction S est définie uniquement sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction S est décroissante sur $]0, +\infty[$, positive. Que peut-on en déduire du comportement de S en 0 et en $+\infty$?
3. Montrer que si $x > 0$, on a

$$0 \leqslant S(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

et en déduire la limite de S en $+\infty$.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$S(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nx}}{n}$$

et en déduire que $S(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

5. Déterminer $\| f_n \|_{\infty,]0,+\infty[}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} (f_n)$ est-elle normalement convergente sur $]0, +\infty[$?
6. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} (f_n)$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. En déduire que la fonction S est continue sur $]0, +\infty[$.

   Donner une autre méthode pour déterminer la limite de S en $+\infty$.
7. (a) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et que

$$\forall x > 0\,,\ S'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = -\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{1 - e^{x}}$$

   (b) Montrer (sans utiliser le résultat donné) que

$$\int^x \frac{1}{1 - e^t} dt = x - \ln(e^x - 1) + c$$

   On pourra effectuer le changement de variable $u = e^t$.

   (c) En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[, S(x) = x - \ln(e^x - 1)$ et retrouver les limites de S en 0 et $+\infty$.

Fin