

Devoir surveillé n°3

3 heures

Exercice 1 : énigme du berger

Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante de son troupeau : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Mais comment a-t-il fait ?

1. (a) On souhaite montrer par récurrence sur la taille de la matrice, que le déterminant de toute matrice carrée, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair. Pour cela on pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « une matrice carrée de taille n , dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est de déterminant un nombre impair », pour $n \geq 1$.

On suppose connu le fait qu'une matrice de coefficients entiers admet un déterminant entier (récurrence immédiate sur la taille de la matrice).

- i. Vérifier $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$.
- ii. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour un certain entier n , avec $n \geq 1$.
Soit A une matrice carrée de taille $n+1$ dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs. On note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & L \\ C & B \end{pmatrix}$$

où B est carrée de taille n , L une ligne de taille n et C une colonne de taille n .

Montrer que

$$\det(A) = a_{1,1} \det(B) + 2p$$

avec p entier et en déduire que $\det(A)$ est un entier impair.

- iii. Conclure.

- (b) En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.
2. On note B la matrice carrée de taille 101 construite de la façon suivante : les moutons sont numérotés de 1 à 101.
Lorsque le berger retire le mouton i du troupeau, il sépare alors le reste du troupeau en deux sous-troupeaux A et B égaux (en nombre) et de même poids. On note $B_{i,j}$ les coefficients de la ligne i et colonne j définis par

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si le mouton } j \text{ se trouve dans } A \\ 2 & \text{si le mouton } j \text{ se trouve dans } B \end{cases}$$

On note X la matrice colonne de taille 101 constituée des poids des moutons.

On note M le poids total du troupeau.

- (a) Calculer BU avec U la matrice colonne de taille 101 de coefficients tous égaux à 1.
- (b) Calculer BX .
- (c) Montrer que B est inversible.
- (d) En déduire X et résoudre l'énigme du berger.

Exercice II (un peu devoir maison)

On note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice de coefficients tous nuls sauf à la ligne i et colonne j où le coefficient vaut 1, soit encore

$$E_{i_0,j_0} = (\delta_i^{i_0} \delta_j^{j_0})_{1 \leq i,j \leq n}$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer AE_{i_0,j_0} puis $\text{Tr}(AE_{i_0,j_0})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que si $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(AX) = 0$ alors $A = 0$.
3. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{K})$, montrer que si $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$ alors $A = B$.

Exercice III : de la liberté dans le monde

Soit $a_0, \dots, a_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$, on considère la famille $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ définie par

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, P_i = (X - a_i)^n$$

On souhaite démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

1. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Quel est le degré de P_i ?
2. On suppose qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i = \sum_{i=0}^n \lambda_i (X - a_i)^n = 0 \quad (*)$$

(a) Montrer que $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^n = 0$

(b) En dérivant (*), montrer que $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^{n-1} = 0$.

(c) Montrer que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^k = 0.$$

(d) En déduire que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (e) Justifier que A est inversible. Conclure.
- (f) Existe-t-il des bases de $\mathbb{K}_n[X]$ dont tous les polynômes ont le même degré? Quel est ce degré forcément?

Exercice IV : de la stabilité et de la droiture

Soit u un endomorphisme de E_n espace vectoriel de dimension n .

1. Soit D une droite stable par u , avec $D = \text{Vect}(e)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e) = \lambda e$.
2. On suppose que $E_n = \bigoplus_{i=1}^n D_i$ et que $D_1, \dots, D_n$ sont stables par u . Montrer qu'il existe une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de sorte que la matrice de u dans cette base soit diagonale, c'est à dire

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(u) = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On dit que u est diagonalisable ; les termes diagonaux de D sont appelés les valeurs propres de u .

3. Réciproquement, montrer que si u est diagonalisable, alors il existe des droites $D_1, \dots, D_n$ stables par u de sorte que $E_n = \bigoplus_{i=1}^n D_i$.
4. Justifier que les endomorphismes suivants sont diagonalisables selon la définition ci-dessus :
 - $u = 0$ l'endomorphisme nul ;
 - $u = \text{id}_{E_n}$ l'endomorphisme identité ;
 - $u = \alpha \text{id}_{E_n}$ l'homothétie vectorielle de rapport α .

Exercice V (cours et plus si affinité)

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifiant $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_p = 0$.

1. Déterminer un polynôme noté P annulateur de A de degré 3 unitaire.
2. Vérifier que $P = (X - 1)^2(X - 2)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^n par P , écrite de manière classique $X^n = (X - 1)^2(X - 2)Q + a_n X^2 + b_n X + c_n$ (*).

(a) Montrer que

$$\begin{cases} 1 &= a_n + b_n + c_n \\ 2^n &= 4a_n + 2b_n + c_n \end{cases}$$

(b) En dérivant (*), montrer que $n = 2a_n + b_n$.

(c) En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n .

(d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (2^n - n - 1)A^2 + (3n + 2 - 2^{n+1})A + (2^n - 2n)I_p \quad (1)$$

(e) Montrer que A est inversible et préciser A^{-1} en fonction de A^2 , A et I_p . La formule (1) est-elle encore vraie si $n = -1$?

(f) (***) Montrer que (1) est encore vraie si $n \in \mathbb{Z}$ (plusieurs méthodes sont possibles).

Exercice VI

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n)$ une famille de $n + 1$ réels deux à deux distincts. On note pour tout i de 0 à n , L_i le polynôme élémentaire d'interpolation de Lagrange

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

On considère l'application $(\cdot|\cdot)$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par

$$(P|Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$$

1. Rappeler la valeur de $L_i(a_j)$ pour tout i et j entre 0 et n .
2. Vérifier que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que pour tout i entre 0 et n , $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$(L_i|P) = P(a_i).$$

4. Calculer $(L_i|L_j)$ pour tout i et j de $\{0, \dots, n\}$. En déduire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base $(L_0, \dots, L_n)$.
5. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$, préciser le coefficient de X^n du polynôme L_i .
En déduire que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$,

$$\sum_{i=0}^n \frac{P(a_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)} = 0.$$

Exercice 1 : énigme du berger

Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante de son troupeau : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Mais comment a-t-il fait ?

1. (a) On souhaite montrer par récurrence sur la taille de la matrice, que le déterminant de toute matrice carrée, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair. Pour cela on pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « une matrice carrée de taille n , dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est de déterminant un nombre impair », pour $n \geq 1$.

On suppose connu le fait qu'une matrice de coefficients entiers admet un déterminant entier (récurrence immédiate sur la taille de la matrice).

- i. Pour $n = 1$, soit A une telle matrice, $A = (2k + 1)$, $\det(A) = 2k + 1$ impair. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Pour $n = 2$, A une telle matrice, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} 2k + 1 & 2p \\ 2q & 2k' + 1 \end{pmatrix}$$

de déterminant $(2k + 1)(2k' + 1) - 4pq = 2(2kk' + k + k' - 2pq) + 1$ entier impair. Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

- ii. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour un certain entier n , avec $n \geq 1$.
Soit A une matrice carrée de taille $n + 1$ dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs. On note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & L \\ C & B \end{pmatrix}$$

où B est carrée de taille n , L une ligne de taille n et C une colonne de taille n . On développe alors le déterminant de A selon par exemple la première ligne,

$$\det(A) = (2k + 1) \det(B) + \sum_{i=2}^{n+1} l_{i-1} \det(A_{1,i})$$

avec $A_{1,i}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne 1 et la colonne i , et comme $A_{1,i-1}$ est à coefficients entiers, $\det(A_{1,i-1})$ est un entier. Ainsi, sachant que les l_{i-1} sont des entiers pairs, on obtient

$$\det(A) = a_{1,1} \det(B) + 2p$$

avec p entier. Or $a_{1,1}$ est impair et $\det(B)$ aussi par hypothèse de récurrence, la matrice B étant encore de la forme voulue, le produit $a_{1,1} \det(B)$ est impair et donc $\det(A)$ aussi.

- iii. Ainsi la propriété est encore vraie au rang $n + 1$, ce qui prouve l'hérédité. On en déduit le résultat par récurrence.

- (b) On a donc le déterminant d'une telle matrice qui est non nul. Une matrice de cette forme est donc inversible.

2. (a) On a

$$BU = \left(\sum_{k=1}^{101} b_{i,k} u_k \right)_{1 \leq i \leq 101} = \left(\sum_{k=1}^{101} b_{i,k} \right)_{1 \leq i \leq 101}$$

Or sur une ligne de B , nous avons une fois le nombre 1, 50 fois le nombre 0 et 50 fois le nombre 2, soit une somme des coefficients valant $1 + 2 \times 50 = 101$. Ainsi

$$BU = 101U$$

(b) On a

$$BX = \left(\sum_{k=1}^{101} b_{i,k} x_k \right)_{1 \leq i \leq 101}$$

et pour tout i entre 1 et 101,

$$\sum_{k=1}^{101} b_{i,k} x_k = x_i + 0 \cdot (M - x_i)/2 + 2 \cdot (M - x_i)/2 = M$$

et ainsi $BX = MU$.

(c) Comme B a des coefficients diagonaux impairs, autres pairs, B est inversible d'après la question 1b.

(d) Comme $BX = MU$ et $BU = 101.U$, on a

$$B \left(\frac{M}{101} U \right) = MU = BX$$

et comme B inversible,

$$X = \frac{M}{101} U$$

ce qui prouve l'énigme du berger.

Exercice II (un peu devoir maison)

On note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice de coefficients tous nuls sauf à la ligne i et colonne j où le coefficient vaut 1, soit encore

$$E_{i_0, j_0} = (\delta_i^{i_0} \delta_j^{j_0})_{1 \leq i, j \leq n}$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On détermine AE_{i_0, j_0} formellement : on a

$$AE_{i_0, j_0} = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} \delta_k^{i_0} \delta_j^{j_0} \right) = (a_{i, i_0} \delta_j^{j_0})$$

Ainsi

$$\text{Tr}(AE_{i_0, j_0}) = \sum_{i=1}^n a_{i, i_0} \delta_i^{j_0} = a_{j_0, i_0}$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(AX) = 0$. Pour $X = E_{i_0, j_0}$, nous obtenons $a_{j_0, i_0} = 0$, pour tout i_0 et j_0 . Ainsi $A = 0$.

3. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{K})$, avec $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$. Alors par linéarité de la trace,

$$\text{Tr}((A - B)X) = \text{Tr}(AX - BX) = \text{Tr}(AX) - \text{Tr}(BX) = 0$$

et ainsi d'après la question précédente, $A - B = 0$ soit $A = B$.

Exercice III : de la liberté dans le monde

Soit $a_0, \dots, a_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$, on considère la famille $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ définie par

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, P_i = (X - a_i)^n$$

On souhaite démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

1. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$, $P_i = (X - a_i)^n$ est de degré n .
2. On suppose qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i = \sum_{i=0}^n \lambda_i (X - a_i)^n = 0 \quad (*)$$

- (a) En substituant 0 à X dans $(*)$,

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i (-a_i)^n = 0$$

et en divisant par $(-1)^n$, on obtient $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^n = 0$.

- (b) On dérive $(*)$, on a

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i n (X - a_i)^{n-1} = 0$$

et en substituant 0 à X , et en simplifiant par $n(-1)^{n-1}$, on obtient $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^{n-1} = 0$.

- (c) Soit $p \in \{0, \dots, n\}$, on dérive p fois $(*)$

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i n(n-1) \cdots (n-p+1) (X - a_i)^{n-p} = 0$$

et en substituant 0 à X , et en simplifiant par $\frac{n!}{(n-p)!}(-1)^{n-p}$, on obtient

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^{n-p} = 0.$$

Ainsi comme $n - p$ prend toutes les valeurs entre 0 et n lorsque p prend toutes les valeurs entre 0 et n (à l'envers), on obtient

$$\forall p \in \{0, \dots, n\}, \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^p = 0.$$

- (d) Il suffit d'écrire matriciellement les relations précédentes, soit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (e) Comme A est une matrice de Vandermonde, avec $a_0, \dots, a_n$ deux à deux distincts, $\det(A) \neq 0$ et ainsi A est inversible. On en déduit que

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

- (f) La famille $((X - a_0)^n, \dots, (X - a_n)^n)$ est donc libre, de cardinal $n + 1$ la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$, et c'est bien une famille de $\mathbb{K}_n[X]$, et donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, constitué de polynômes tous de degré n .

Si on avait une base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée de polynômes de même degré d , avec $d < n$, X^n en serait combinaison linéaire, donc de degré inférieur ou égal à d , ce qui est contradictoire. Ainsi si on a une base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée de polynômes de même degré d , on a forcément $d = n$.

Exercice IV : de la stabilité et de la droiture

Soit u un endomorphisme de E_n espace vectoriel de dimension n .

1. Soit D une droite stable par u , avec $D = \text{Vect}(e)$. Comme $u(D) \subset D$, on a $u(e) \in D$ et ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e) = \lambda e$.

2. On suppose que $E_n = \bigoplus_{i=1}^n D_i$ et que $D_1, \dots, D_n$ sont stables par u . On applique la question précédente pour chaque droite stable $D_i = \text{Vect}(e_i)$ avec e_i vecteur directeur de D_i . Ainsi il existe λ_i , tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

La famille construite $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E par concaténation de bases de chaque E_i puisque $E_n = \bigoplus_{i=1}^n D_i$. La matrice de u dans cette base est bien

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Donc il existe une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de sorte que la matrice de u dans cette base soit diagonale, c'est à dire

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(u) = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

On dit que u est diagonalisable; les termes diagonaux de D sont appelés les valeurs propres de u .

3. Réciproquement, si u est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de sorte que la matrice de u dans cette base soit diagonale, c'est à dire

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(u) = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

On pose pour tout i , $D_i = \text{Vect}(e_i)$, qui est stable par u puisque si $x \in D_i$, $x = \alpha e_i$, et

$$u(x) = \alpha u(e_i) = \alpha \lambda_i e_i \in D_i$$

On a donc $D_1, \dots, D_n$ stables par u de sorte que $E_n = \bigoplus_{i=1}^n D_i$ par propriété de construction de sous-espace vectoriels en somme directe égale à l'espace entier à partir d'une base de l'espace que l'on VERBE ?.

4. Justifier que les endomorphismes suivants sont diagonalisables selon la définition ci-dessus :
 – $u = 0$ l'endomorphisme nul : dans toute base, la matrice est nulle donc diagonale ;
 – $u = \text{id}_{E_n}$ l'endomorphisme identité : dans toute base, la matrice est la matrice identité donc diagonale ;
 – $u = \alpha \text{id}_{E_n}$ l'homothétie vectorielle de rapport α : dans toute base, la matrice est la matrice λI_n donc diagonale.

Exercice V (cours et plus si affinité)

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifiant $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_p = 0$.

1. Si $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$, on a $P(A) = 0$. Ainsi P est annulateur de A de degré 3 unitaire.
2. Si on ne regarde pas le résultat, comme 1 est racine, $P = (X - 1)(X^2 - 3X + 2)$, puis de nouveau 1 racine, $P = (X - 1)(X - 1)(X - 2) = (X - 1)^2(X + 2)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^n par P , écrite de manière classique $X^n = (X - 1)^2(X - 2)Q + a_nX^2 + b_nX + c_n$ (*).

(a) En substituant 1 à X ainsi que 2 à X , il vient

$$\begin{cases} 1 &= a_n + b_n + c_n \\ 2^n &= 4a_n + 2b_n + c_n \end{cases}$$

(b) Il nous manque une équation. En dérivant (*), on a

$$nX^{n-1} = 2(X - 1)(X - 2)Q + (X - 1)^2[(X - 2)Q]' + 2a_nX + b_n$$

On substitue alors 1 à X , on obtient $n = 2a_n + b_n$.

(c) Ainsi nous avons le système

$$\begin{cases} 1 &= a_n + b_n + c_n & (1) \\ 2^n &= 4a_n + 2b_n + c_n & (2) \\ n &= 2a_n + b_n & (3) \end{cases}$$

d'où avec (2) - (1)

$$\begin{cases} 2^n - 1 &= 3a_n + b_n & (2') \\ n &= 2a_n + b_n & (3) \end{cases}$$

et avec (2') - (3) on obtient $2^n - n - 1 = a_n$, puis $b_n = n - 2a_n = 3n + 2 - 2^{n+1}$ puis $c_n = 1 - a_n - b_n = 2^n - 2n$.

(d) Ainsi on a obtenu

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (2^n - n - 1)A^2 + (3n + 2 - 2^{n+1})A + (2^n - 2n)I_p \quad (1)$$

(e) Comme $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_p = 0$, $A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_p$ est ainsi

$$\frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_p)A = I_p$$

On en déduit que A est inversible à gauche, donc inversible avec

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_p)$$

On constate que la formule (1) est encore vraie si $n = -1$.

(f) On peut procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ pour montrer que

$$A^{-n} = (2^{-n} + n - 1)A^2 + (-3n + 2 - 2^{-n+1})A + (2^{-n} + 2n)I_p \quad (**)$$

ou vérifier si c'est bien l'inverse : on simplifie (calculs longs)

$$\begin{aligned} & [(2^{-n} + n - 1)A^2 + (-3n + 2 - 2^{-n+1})A + (2^{-n} + 2n)I_p] \\ & \times [(2^n - n - 1)A^2 + (3n + 2 - 2^{n+1})A + (2^n - 2n)I_p] \end{aligned}$$

La récurrence semble plus rapide. Pour $n = 1$, la formule (**) est vraie.

On la suppose vraie pour un certain n , $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} A^{-(n+1)} &= A^{-n}A^{-1} = [(2^{-n} + n - 1)A^2 + (-3n + 2 - 2^{-n+1})A + (2^{-n} + 2n)I_p] \times A^{-1} \\ &= (2^{-n} + n - 1)A + (-3n + 2 - 2^{-n+1})I_p + (2^{-n} + 2n)A^{-1} \\ &= (2^{-n} + n - 1)A + (-3n + 2 - 2^{-n+1})I_p + (2^{-n-1} + n)(A^2 - 4A + 5I_p) \\ &= (2^{-(n+1)} + (n+1) - 1)A^2 + (2^{-n} - 2 \cdot 2^{-n} + n - 1 - 4n)A \\ &+ (5 \cdot 2^{-n-1} - 4 \cdot 2^{-n-1} - 3n + 2 + 5n)I_p \\ &= (2^{-(n+1)} + (n+1) - 1)A^2 + (-2^{-n} - 3(n+1) + 2)A + (2^{-n-1} + 2(n+1))I_p \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Exercice VI

1. Nous avons $L_i(a_j) = \delta_i^j$ pour tout i et j entre 0 et n .

2. On vérifie que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

La symétrie est évidente vu la définition.

On vérifie la linéarité selon la position gauche : si $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} (\lambda P + \mu Q|R) &= \sum_{i=0}^n (\lambda P(a_i) + \mu Q(a_i))R(a_i) = \sum_{i=0}^n (\lambda P(a_i)R(a_i) + \mu Q(a_i)R(a_i)) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^n P(a_i)R(a_i) + \mu \sum_{i=0}^n Q(a_i)R(a_i) = \lambda(P|R) + \mu(Q|R) \end{aligned}$$

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$(P|P) = \sum_{i=0}^n P(a_i)^2 \geq 0$$

comme somme de carrés de nombres réels.

Si de plus $(P|P) = 0$, nous avons alors chaque termes nul (somme nulle de termes positifs) et ainsi $P(a_i) = 0$ pour tout i .

Alors P admet $n+1$ racines $a_0, \dots, a_n$, et comme P de degré inférieur à n , $P = 0$. Ainsi nous avons bien une forme symétrique, bilinéaire, définie positive.

3. Soit i entre 0 et n , $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$(L_i|P) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k)P(a_k) \sum_{k=0}^n \delta_i^k P(a_k) = P(a_i).$$

4. Ainsi $(L_i|L_j) = L_j(a_i) = \delta_i^j$, pour tout i et j de $\{0, \dots, n\}$.

On en déduit déduire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ et un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit ainsi dans cette base $(L_0, \dots, L_n)$ orthonormée

$$P = \sum_{i=0}^n (P|L_i)L_i = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i.$$

5. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$, on regarde le coefficient de X^n du polynôme L_i , il s'agit de

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j}$$

Soit P de degré inférieur ou égal à $n - 1$, son coefficient de X^n est donc nul, et comme

$$P = \sum_{i=0}^n (P|L_i)L_i = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i,$$

le coefficient de X^n de P est aussi

$$\sum_{i=0}^n \frac{P(a_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}$$

qui vaut donc 0.