Devoir en temps libre n°3

On pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$$

et pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$$

1. Montrer que la fonction S est définie uniquement sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction S est décroissante sur $]0, +\infty[$, positive. Que peut-on en déduire du comportement de S en 0 et en $+\infty$?
3. Montrer que si $x > 0$, on a

$$0 \leqslant S(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

   et en déduire la limite de S en $+\infty$.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$S(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$$

   et en déduire que $S(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.
5. Déterminer $\| f_n \|_{\infty,]0,+\infty[}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}(f_n)$ est-elle normalement convergente sur $]0, +\infty[$?
6. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}(f_n)$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. En déduire que la fonction S est continue sur $]0, +\infty[$.

   Donner une autre méthode pour déterminer la limite de S en $+\infty$.
7. (a) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et que

$$\forall x > 0\,,\ S'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{x}}$$

   (b) Montrer (sans utiliser le résultat donné) que

$$\int^{x} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t = x - \ln(\mathrm{e}^{x}-1) + c$$

   On pourra effectuer le changement de variable $u = \mathrm{e}^{t}$.

   (c) En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[, S(x) = x - \ln(\mathrm{e}^{x}-1)$ et retrouver les limites de S en 0 et $+\infty$.

Fin

1. Soit $x \leqslant 0$, comme
$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$
on a par comparaison à une série de Riemann divergente que la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$ diverge.
Si $x > 0$, on a par exemple
$$n^2 \times f_n(x) = n\mathrm{e}^{-nx} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
et ainsi
$$f_n(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
ce qui entraîne la convergence absolue et donc la convergence de la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$.

Ainsi on peut poser pour $x > 0$ seulement,
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$$
et donc la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement vers la fonction S sur $]0, +\infty[$.

2. Si $0 < x < y$, alors pour tout entier n non nul, on a $nx < ny$ et ainsi $\mathrm{e}^{-nx} > \mathrm{e}^{-ny}$ puis
$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x} > \frac{\mathrm{e}^{-ny}}{n} = f_n(y)$$
et en sommant on obtient $S(x) > S(y)$. Donc la fonction somme S est une fonction strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. De plus on a
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} > 0$$
comme somme d'une série à termes strictement positifs (positif avec au moins un strictement positif).

D'après le théorème sur les limites des fonctions monotones (décroissante ici), on peut en déduire que S admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et une limite en 0 qui peut-être finie ou $+\infty$.

3. On a si $n \geqslant 1$,
$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \leqslant \mathrm{e}^{-nx} = (\mathrm{e}^{-x})^n$$
et comme $0 < \mathrm{e}^{-x} < 1$, nous pouvons sommer (à droite, on a une somme géométrique convergente)
$$0 \leqslant S(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} \times \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$$
et ainsi par encadrement, on obtient
$$\lim_{x \to +\infty} S(x) = 0 = \ell$$

4. Soit $x > 0$, on a bien sûr (termes positifs)

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$$

On raisonne alors par l'absurde. Si on suppose que S admet une limite finie en 0, L, en passant à la limite lorsque x tend vers 0, on obtient que

$$L \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

Or on sait que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

ce qui est contradictoire. Ainsi la fonction S tend forcément vers $+\infty$ en 0^+.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} = f_n(x)$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, et ainsi on a

$$\| f_n \|_{\infty,]0,+\infty[} = \sup_{x>0} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{n}$$

et ainsi la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \| f_n \|_{\infty,]0,+\infty[}$ diverge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.

6. Par contre, on a vu la décroisssance de la fonction f_n

$$\| f_n \|_{\infty,[a,+\infty[} = \sup_{x\geqslant a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{\mathrm{e}^{-na}}{n}$$

et ainsi la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \| f_n \|_{\infty,[a,+\infty[}$ est convergente par comparaison à une série numérique convergente convergente (vu à la question 1 en fait). Donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Comme nous avons une série de fonctions qui sont toutes continues, nous obtenons que la fonction somme S est aussi continue, sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$ et ainsi sur $]0, +\infty[$.

On peut alors appliquer le théorème de la double limite en $+\infty$, sachant que toutes les fonctions f_n admettent une limite en $+\infty$ égale à $0 = \ell_n$, que la convergence de la série est uniforme sur $[1, +\infty[$ par exemple (puisque normale) et donc on peut en déduire que

$$\lim_{X\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0.$$

ce qui permet de retrouver le résultat de la question 4.

7. (a) Nous avons une série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ de fonctions toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ qui converge simplement vers la fonction somme S sur $]0, +\infty[$. On considère la série des dérivées

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n'(x)$$

avec

$$f_n'(x) = -\mathrm{e}^{-nx}$$

Si $a > 0$, nous avons si $n \geqslant 1$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}$ décroissante et ainsi

$$\| f_n' \|_{\infty,[a,+\infty[} = |f_n'(a)| = \mathrm{e}^{-na} = (\mathrm{e}^{-a})^n$$

Comme la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-na}$ est convergente (géométrique de raison $\mathrm{e}^{-a} < 1$), la série des dérivées converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.
Ainsi d'après le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ de la somme d'une série de fonctions, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et on a par dérivation terme à terme si $x > 0$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}$$

que nous sommes capable de déterminer (la somme est géométrique)

$$S'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = -\frac{1}{\mathrm{e}^{x}-1} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{x}}$$

(b) On effectue le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$, $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = u\mathrm{d}t$, soit

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{1-\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t = \int^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1-u} \times \frac{\mathrm{d}u}{u} &= \int^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{u(1-u)}\mathrm{d}u \\ &= \int^{\mathrm{e}^x} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1}\right] \mathrm{d}u \\ &= \ln(\mathrm{e}^x) - \ln(\mathrm{e}^x - 1) + c = x - \ln(\mathrm{e}^x - 1) + c\end{aligned}$$

(c) Ainsi il existe une constante c réelle telle que

$$\forall x > 0\,,\ S(x) = x - \ln(\mathrm{e}^x - 1) + c$$

Pour déterminer la constante d'intégration c (on ne peut pas utiliser $S(0)$, ni une autre valeur de S), on utilise la limite de S en $+\infty$. On a

$$S(x) = x - \ln(\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-x}) + c = x - x - \ln(1-\mathrm{e}^{-x}) + c = -\ln(1-\mathrm{e}^{-x}) + c \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} c$$

et ainsi d'après la question 3, $c = 0$. On a donc finalement

$$\boxed{\forall x > 0\,,\ S(x) = x - \ln(\mathrm{e}^x - 1).}$$

En 0, nous retrouvons le fait que S tend vers $+\infty$.
En $+\infty$, nous devons lever l'indétermination, on a

$$S(x) = x - \ln \mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-x}) = x - x - \ln(1-\mathrm{e}^{-x}) = -\ln(1-\mathrm{e}^{-x})$$

qui tend vers 0 en $+\infty$.