

Quinzaine 5 du 08/12 au 19/12

Chapitre 6 : Série entière

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente (*).

Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Pour $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, et pour $|z| > R$, diverge grossièrement.

Commentaires : les élèves doivent pouvoir exploiter les informations suivantes :

$(a_n z_0^n)$ bornée; $(a_n z_0^n)$ non bornée; $\sum a_n z_0^n$ convergente; $\sum a_n z_0^n$ divergente; $\sum a_n z_0^n$ absolument convergente mais divergente; $\forall z$ avec $|z| < r$, la suite $(a_n z^n)$ bornée ou $\sum a_n z^n$ convergente; et autres, en termes de conséquences sur le rayon.

Disque ouvert de convergence, intervalle de convergence (et cercle d'incertitude)

Si R_a est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_b celui de $\sum b_n z^n$, alors :

si $a_n = O(b_n)$ ou si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$

si $|a_n| \sim |b_n|$ ou $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.

Les élèves doivent savoir utiliser, en adaptant, la règle de d'Alembert pour les séries lacunaires, par exemple de la forme $\sum b_n z^{2n}$ et $\sum b_n z^{2n+1}$.

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence. Rayon de convergence d'une série dérivée.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ est de rayon 1.

Rayon de convergence de la somme de deux séries entières (*).

Produit de Cauchy de deux séries entières. Rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ est de rayon 1.

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Exemple où la convergence est normale sur $[-R, R]$ et conséquence.

Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme; étude cependant du cas où le critère spécial de Leibniz s'applique pour obtenir une convergence uniforme par la majoration du reste sur $[0, R]$ ou $[-R, 0]$ ou $[-R, R]$.

Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.

Caractère \mathcal{C}^∞ de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme (*). Unicité des coefficients pour une série entière de rayon de convergence non nul.

Formule par dérivation successive de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} \quad (*)$$

Développement en séries entière au voisinage de zéro d'une fonction d'une variable réelle.

Fonction développable en série entière.

Série de Taylor d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .

Formule de Taylor avec reste intégral. Utilisation avec les fonctions exponentielle (cosinus et sinus, exponentielle imaginaire).

Développements des fonctions usuelles : les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielles, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ (*), $x \mapsto \ln(1+x)$ (*).

Utilisation des équations différentielles. Développement de $(1+x)^\alpha$ en 0 (*). Cas $\alpha \in \{-1/2, 1/2\}$.

Expression à l'aide de factorielles.

Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (admis).

Exemple de la somme géométrique complexe. Développement de $\exp(z)$ avec z complexe.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.

