Devoir surveillé n°4
4 heures

I - CCP - PC 2015 – Extraits

On considère la fonction f et, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall t \in [0, +\infty[\,,\ f(t) = 0 \quad , \quad f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t} t^n}{n!}$$

1. On rappelle q'un équivalent de $n!$ est $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (a) Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire son maximum.
   (b) Montrer que $f_n(n) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Établir que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
2. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. Quelle est sa somme ?
   (b) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$.
   (c) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice II

Soit $r \in]0, 1[$ fixé.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction p_n par $\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_n(t) = r^n \cos(nt)$.
   (a) Montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général p_n.
   (b) Pour tout réel t, on pose alors $P(t) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)$.

   En remarquant que $2\cos(nt) = \mathrm{e}^{-int} + \mathrm{e}^{int}$, justifier l'égalité

   $$P(t) = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.
   (a) Justifier que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On définit alors $g(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\mathrm{d}t$.

On note aussi $g_0(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = c_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \quad g_n(x) = r^n\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

Justifier alors l'égalité : $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

(c) Montrer que la fonction g ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: pour cela, on précisera l'usage du théorème du cours concernant la classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction somme de série de fonctions.

3. On considère E l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et qui sont 2π-périodiques.
À toute fonction $f \in E$, on associe $g = \Pi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

(a) En utilisant les questions précédentes, montrer que g est définie, 2π-périodique et continue.

(b) Justifier que l'application Π ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E.

III

On rappelle que pour tout x réel, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

On pose si $x > 0$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{6(x+3)} + \cdots$$

et on note pour tout entier n, la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

1. Justifier que S est bien définie.
2. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\| f_n \|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{n!(n+a)}$$

En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $S'(x)$ pour $x > 0$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $S'(x) < 0$.

5. Montrer que pour tout $x > 0$, $S(x) > 0$. En déduire que S admet une limite finie en $+\infty$ que l'on note ℓ et que $\ell \geqslant 0$.
6. Montrer que si $x > 0$, on a
$$xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad (*)$$
7. Montrer par l'absurde en utilisant $(*)$ que $\ell = 0$, puis que
$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}x}$$
8. Pour $a > 0$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et retrouver la limite de S en $+\infty$.
9. Déterminer $S(1)$ et en déduire que
$$S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$
10. Donner une représentation graphique de la fonction S.

IV

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On défnit la suite de fonctions $(f_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$ par
$$f_{\alpha,n}(x) = x(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx}).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $h : x \mapsto x$.
2. Étudier les variations de la fonction $f_{\alpha,n} - h$ et en déduire les valeurs de α pour lesquelles la convergence de la suite de fonctions $(f_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers h est uniforme.
3. Déterminer alors pour les valeurs de α obtenues à la question précédente,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x$$
sans calculer l'intégrale.
Vérifier le résultat en calculant l'itégrale.
4. Peut-on affimer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_{2,n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_{2,n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x?$$
Vérifier ou nier l'égalité ci-dessus par un caclul direct.
5. Pour quelle valeurs de α a-t-on
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x?$$
6. On pose si $n \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^+$,
$$g_{\alpha,n}(x) = f_{\alpha,n}(x) - x = xn^\alpha \mathrm{e}^{-nx}.$$

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} g_{\alpha,n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On notera g_α sa somme.

(b) Montrer à l'aide de la question 2. que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} g_{\alpha,n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha < 0$.

(c) En déduire que si $\alpha < 0$, les expressions suivantes ont un sens et

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_{\alpha,n}(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_{\alpha,n}(x) \mathrm{d}x.$$

(d) Démontrer

$$\int_0^1 g_{\alpha,n}(x) \mathrm{d}x = n^{\alpha-2} - n^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-n} - n^{\alpha-2} \mathrm{e}^{-n}$$

On suppose désormais que $\alpha < 1$. Montrer que la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^1 g_{\alpha,n}(x) \mathrm{d}x$ est convergente.

La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} g_{\alpha,n}$ converge-t-elle normalement sur $[0,1]$?

Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} g_{\alpha,k}(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_{\alpha,n}(x) \mathrm{d}x.$$

Peut-on affimer que g_α est continue sur $[0,1]$ et que

$$\int_0^1 g_\alpha(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_{\alpha,n}(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_{\alpha,n}(x) \mathrm{d}x?$$

(e) On suppose que $\alpha = 0$. Montrer que

$$g_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire que g_0 est continue sur $\mathbb{R}^+$ (et donc sur $[0,1]$).
En déduire est g_0 est bornée sur $[0,1]$. On note $B = \| g_0 \|_{\infty,[0,1]}$.

On note

$$S_{0,n} = \sum_{k=0}^{n} g_{0,k} \qquad R_{0,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_{0,k}$$

Montrer que

$$R_{0,n}(x) = \mathrm{e}^{-(n+1)x} \frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-(n+1)x} g_0(x)$$

En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 R_{0,n}(x) \mathrm{d}x = 0$$

puis que

$$\int_0^1 g_0(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_{0,n}(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_{0,n}(x) \mathrm{d}x.$$

I - CCP - PC 2015 – Extraits

1. (a) On considère la fonction f_n définie que $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{n!}$$

La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme produit de fonctions élémentaires de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a

$$f_n'(t) = \frac{1}{n!}\left[-\mathrm{e}^{-t}t^n + n\mathrm{e}^{-t}t^{n-1}\right] = \frac{\mathrm{e}^{-t}(n-t)t^{n-1}}{n!}$$

On en déduit les variations de la fonction f_n :

t	0		n		$+\infty$
$f_n'(t)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(n)$	$\searrow$	0

Ainsi la fonction f_n admet un maximum en $t = n$, et ce maximum est

$$f_n(n) = \frac{\mathrm{e}^{-n}n^n}{n!}$$

(b) Ainsi, en utilisant l'équivalent de Stirling, on a

$$f_n(n) = \frac{\mathrm{e}^{-n}n^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-n}n^n}{\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

(c) Ainsi, nous avons

$$\| f_n \|_{\infty,[0,+\infty[} = f_n(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

et donc $\| f_n - 0 \|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ ce qui permet de conclure que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle.

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$, on considère la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-t}\frac{t^n}{n!}$$

Cette série converge (série exponentielle) de somme 1. Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction constante égale à 1.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, pour $a \leqslant n$, on a, vu l'étude de la fonction f_n

$$\| f_n \|_{\infty,[0,a]} = f_n(a) = \mathrm{e}^{-a}\frac{a^n}{n!}$$

terme général d'une série convergente (série exponentielle, multipliée par la constante e^{-a}). Ainsi la série numérique $\sum \| f_n \|_{\infty,[0,a]}$ est convergente. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$.

(c) Nous avons

$$\| f_n \|_{\infty,\mathbb{R}^+} = f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

et ainsi par comparaison à une série de Riemann, la série numérique $\sum \| f_n \|_{\infty,\mathbb{R}^+}$ est divergente. On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$.

II

1. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a pour tout n

$$|p_n(t)| \leqslant r^n$$

et ainsi $\| p_n \|_\infty \leqslant r^n$. Or la série numérique $\sum r^n$ est une série géométrique convergente puisque $0 < r < 1$. Ainsi la série de fonctions $\sum p_n$ est une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

(b) Attention, la somme commence à 1 : on a pour tout t réel

$$\begin{aligned}
P(t) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n(\mathrm{e}^{int} + \mathrm{e}^{-int} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(r\mathrm{e}^{it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(r\mathrm{e}^{-it})^n \\
&= 1 + \frac{r\mathrm{e}^{it}}{1 - r\mathrm{e}^{it}} + \frac{r\mathrm{e}^{-it}}{1 - r\mathrm{e}^{-it}} \\
&= \frac{(1 - r\mathrm{e}^{it})(1 - r\mathrm{e}^{-it}) + r\mathrm{e}^{it}(1 - r\mathrm{e}^{-it}) + r\mathrm{e}^{-it}(1 - r\mathrm{e}^{it})}{(1 - r\mathrm{e}^{it})(1 - r\mathrm{e}^{-it})} \\
&= \frac{1 - 2r\cos(t) + r^2 + 2r\cos(t) - 2r^2}{(1 - r\mathrm{e}^{it})(1 - r\mathrm{e}^{-it})} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}
\end{aligned}$$

2. (a) La fonction f étant continue, f est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$; comme f est 2π périodique, est alors bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(b) Soit x fixé, on considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$. On a si $n \geqslant 1$

$$g_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n}{\pi}[\cos(nt)\cos(nx) + \sin(nt)\sin(nx)]f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n}{\pi}\cos(n(x - t))f(t)\mathrm{d}t$$

On considère alors la série de fonction $\sum h_n$ avec

$$h_n(t) = r^n\cos(n(x - t))f(t)$$

On a alors

$$|h_n(t)| \leqslant r^n \| f \|_\infty$$

et ainsi $\| h_n \|_\infty \leqslant \| f \|_\infty r^n$. Ainsi la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$, et donc uniformément. Ainsi puisque les fonctions sont continues, on peut intégrer terme à terme en écrivant (interversion du signe intégral et du signe somme) :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+2\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\cos(n(x-t)\right)f(t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} r^n[\cos(nt)\cos(nx)+\sin(nt)\sin(nx)]f(t)\mathrm{d}t\\
&= g_0(x)+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(nx)\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)f(t)\mathrm{d}t+\sin(nx)\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)f(t)\mathrm{d}t\\
&= g_0(x)+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)
\end{aligned}$$

(c) On considère la série de fonctions $\sum g_n$, série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g.
La série des dérivées est $\sum g_n'$ avec si $n \geqslant 1$ $g_n'(x) = nr^n(-a_n\sin(nx)+b_n\cos(nx))$ (et $g_0'=0$)). or on vérifie que (a_n) et (b_n) sont bornées par B borne de f et ainsi

$$\| g_n' \|_\infty \leqslant 2Br^n$$

ce qui assure la convergence normale et donc uniforme de la série des dérivées $\sum g_n'$: ainsi on peut appliquer le théorème de dérivation terme à terme : g est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n(-a_n\sin(nx)+b_n\cos(nx))$$

3. On a vu que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donc elle est continue. pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x+2\pi-t)f(t)\mathrm{d}t$$

or la fonction P est 2π périodique puisque

$$P(t+2\pi) = 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(n(t+2\pi)) = 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(nt) = P(t)$$

et ainsi

$$g(x+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x+2\pi-t)f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\mathrm{d}t = g(x)$$

Ainsi la fonction g est aussi 2π périodique.

4. Ainsi Π définie une application de E dans E. Vérifions que Π est linéaire. Soit f_1 et f_2

deux fonctions de E, λ et μ deux scalaires, nous avons pour tout x

$$\begin{aligned}
\Pi(\lambda f_1 + \mu f_2)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)(\lambda f_1(t) + \mu f_2(t))\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\lambda P(x-t) f_1(t) + \mu P(x-t) f_2(t)))\mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t) f_1(t) + \frac{\mu}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t) f_2(t)))\mathrm{d}t \\
&= \lambda\Pi(f_1)(x) + \mu\Pi(f_2)(x) \\
&= (\lambda\Pi(f_1) + \mu\Pi(f_2))(x)
\end{aligned}$$

et ainsi $\Pi(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda\Pi(f_1) + \mu\Pi(f_2)$: Π est linéaire. Donc Π est un endomorphisme de E.

III

1. Soit $x > 0$, on considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$. Il s'agit d'une série alternée, et on a la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n!(n+x)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante vers 0. Ainsi d'après le critère spécial des séries alternées, la série converge et on peut donc définir $S(x)$. Ainsi la fonction S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. Si $x \in [a, b]$, on a $0 < a \leqslant x \leqslant b$ et ainsi

$$\frac{1}{n!(n+x)} \leqslant \frac{}{n!(n+a)}$$

Ainsi on a (la borne est atteinte en a)

$$\| f_n \|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{n!(n+a)}$$

et pour $n \geqslant 1$,

$$\| f_n \|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{n!(n+a)} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et ainsi la série numérique $\sum \| f_n \|_{\infty,[a,b]}$ est convergente, c'est à dire que la série de fonctions $\sum(f_n)$ converge normalement sur le segment $[a, b]$, donc sur tout segment de $]0, +\infty[$. Comme les fonctions f_n sont toutes continues sur $]0, +\infty[$, on en déduit d'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonction que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a

$$f_n'(x) = -\frac{1}{n!(n+x)^2}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers S sur $]0, +\infty[$. Comme

$$\| f_n' \|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{n!(n+a)^2}$$

on obtient que la série numérique $\sum \parallel f_n' \parallel_{\infty,[a,b]}$ est convergente. Ainsi la série de fonctions $\sum (f_n')$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi d'après le théorème de $\mathcal{C}^1$ de la somme d'une série de fonctions, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall x > 0\,,\; S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}$$

4. Soit $x > 0$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}$$

somme alternée, de premier terme négatif, avec la suite $\left(\frac{1}{n!(n+x)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante vers 0, et ainsi la somme est strictement du signe de son premier terme, soit strictement négatif. Ainsi $S'(x) < 0$ et donc la fonction S est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

5. Soit $x > 0$, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

somme alternée, de premier terme positif, avec la suite $\left(\frac{1}{n!(n+x)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante vers 0, et ainsi la somme est strictement du signe de son premier terme, soit strictement positif. Ainsi $S(x) > 0$ et donc la fonction S est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Ainsi, comme S décroissante minorée par 0, S admet une limite finie en $+\infty$ que l'on note ℓ et on a $\ell \geqslant 0$.

6. Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} xS(x) - S(x+1) &= x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(n+x)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!((n+1)+x)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(n+x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(n+x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n!(n+x)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+x)}{n!(n+x)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

7. On suppose par l'absurde que $\ell > 0$, alors par opérations

$$S(x) = \frac{1}{ex} + \frac{1}{x} S(x+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et alors $\ell = 0$, d'où une contradiction.
Ainsi on a forcément $\ell = 0$. Ainsi comme $\frac{1}{x}S(x+1)$ tend vers 0 en $+\infty$, on a

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}x}$$

8. Soit $a > 0$, d'après la question Q2, nous avons encore $\parallel f_n \parallel_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{1}{n!(n+a)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, et ainsi la série numérique $\sum \parallel f_n \parallel_{\infty,[a,+\infty[}$ est convergente, c'est à dire que la série de

fonctions $\sum(f_n)$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
De plus, pour tout n, nous avons

$$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et ainsi d'après le théroème de la double limite, nous avons S qui admet une limite en $+\infty$ avec

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

ce qui permet de retrouver le résultat de la question précédente pour la limite.

9. On a

$$\begin{aligned} S(1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = -\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

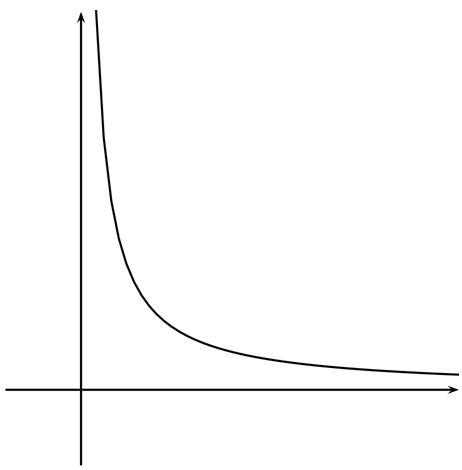
Ainsi, sachant que S est continue en 1, on a

$$xS(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} + S(x+1) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}} + S(1) = 1$$

on en déduit que

$$S(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

10. On donne alors une représentation graphique de la fonction S :



IV

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a si $x > 0$,

$$f_{\alpha,n}(x) = x + xn^\alpha \mathrm{e}^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$$

et $f_{\alpha,n}(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi la suite de fonctions $(f_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $h : x \mapsto x$.

2. La fonction $f_{\alpha,n} - h$ est dérivable avec

$$(f_{\alpha,n} - h)'(x) = n^\alpha \mathrm{e}^{-nx} - x n^{\alpha+1} \mathrm{e}^{-nx} = n^\alpha (1 - nx)\mathrm{e}^{-nx}$$

On en déduit le tableau de variation de $g = f_{\alpha,n} - h$:

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{n^{1-\alpha}}$	$\searrow$	0

On en déduit que $\| f_{\alpha,n} - h \|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\dfrac{1}{n^{1\alpha}}$, qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si $1 - \alpha > 0$ soit encore $\alpha < 1$.
Ainsi la convergence de la suite de fonctions $(f_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers h est uniforme si et seulement si $\alpha < 1$.

3. Si $\alpha < 1$, la suite de fonctions $(f_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h sur le segment $[0, 1]$, les fonctions $f_{\alpha,n}$ étant continues sur $[0, 1]$, et ainsi on a le passage à la limite sous l'intégrale étant licite,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

On peut vérifier ce résultat : en effet, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 x + x n^\alpha \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} + n^\alpha \int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} + n^\alpha \left(\left[-\frac{1}{n} x\mathrm{e}^{-nx} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{2} - n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-n} + n^\alpha \frac{1}{n^2}(1 - \mathrm{e}^{-n}) \\
&= \frac{1}{2} + n^{\alpha-2} - n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-n} - n^{\alpha-2}\mathrm{e}^{-n} \\
&\longrightarrow \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4. Pour $\alpha = 2$, nous n'avons pas la convergence uniforme et ains le théorème d'interversion ne peut pas être utilisé. Cependant, cela ne prouve pas que l'on ne peut faire faire l'interversion. D'après ci-dessus,

$$\int_0^1 f_{2,n}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + 1 - n\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n}$$

qui converge vers $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{2} = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$.

5. On a si $\alpha < 2$,

$$\int_0^1 f_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + n^{\alpha-2} - n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-n} - n^{\alpha-2}\mathrm{e}^{-n} \longrightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$$

Si $\alpha > 2$, nous avons sans indétermination,

$$\int_0^1 f_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x \longrightarrow +\infty$$

Ainsi finalement on a l'égalité demandé si et seulement si $\alpha < 2$.

6. On pose si $n \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^+$,

$$g_{\alpha,n}(x) = f_{\alpha,n}(x) - x = xn^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons si $x > 0$,

$$n^2 g_{\alpha,n}(x) = xn^{\alpha+2}\mathrm{e}^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et ainsi $g_{\alpha,n}(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui assure la convergence absolue et donc la convergence de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} g_{\alpha,n}(x)$.

Pour $x = 0$, $g_{\alpha,n}(x) = 0$, et donc $\sum_{n\geqslant 0} g_{\alpha,n}(x)$ converge aussi.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_{\alpha,n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note g_α sa somme.

(b) D'après la question 2. nous avons $\| \ g_{\alpha,n} \ \|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{n^{1-\alpha}}$ et ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_{\alpha,n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $1-\alpha > 1$ soit encore si et seulement si $\alpha < 0$.

(c) Si $\alpha < 0$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_{\alpha,n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ et donc uniformément, sur $[0,1]$. Alors les expressions suivantes ont un sens et nous onvons l'interversion licite

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x.$$

(d) On a déjà vu que

$$\int_0^1 g_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x = n^{\alpha-2} - n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-n} - n^{\alpha-2}\mathrm{e}^{-n}$$

On suppose désormais que $\alpha < 1$. Alors on a $\alpha - 2 < -1$, la série de Riemann $\sum n^{\alpha-2}$ converge et

$$n^2\left(n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-n} + n^{\alpha-2}\mathrm{e}^{-n}\right) \longrightarrow 0$$

et donc

$$n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-n} - n^{\alpha-2}\mathrm{e}^{-n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et ainsi $\sum n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-n} + n^{\alpha-2}\mathrm{e}^{-n}$ est vonvergente, et donc finalement la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 g_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

On a vu les variations de la question 2., $\| g_{\alpha,n} \|_{\infty,[0,1]} = \frac{1}{\mathrm{e}} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$, et ainsi la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} g_{\alpha,n}$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $1-\alpha > 1$ soit $\alpha < 0$.

On a tout de même par défininition

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x == \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 g_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} g_{\alpha,k}(x)\mathrm{d}x$$

Peut-on affimer que g_α est continue sur $[0,1]$ et que

$$\int_0^1 g_\alpha(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_{\alpha,n}(x)\mathrm{d}x?$$

Si $\alpha < 0$, oui, puisque nous avons alors la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum g_{\alpha,n}$.

Si $\alpha \in [0,1[$, on ne peut ni affirmer ni infirmer directement.

(e) On suppose que $\alpha = 0$. On a si $x > 0$,

$$g_0(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} [\mathrm{e}^{-x}]^n = \frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

par sommm e géométrique et $g_0(0) = 0$ et ainsi

$$g_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a g_0 continue sur $]0,+\infty[$ et

$$g_0(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$$

Ainsi g_0 n'est pas continue en 0. Par contre, g_0 est bornée sur $[0,1]$ puisque la restriction de g_0 sur $]0,1]$ est continue sur $]0,1]$ se prolonge par continuité en 0. On note $B = \| g_0 \|_{\infty,[0,1]}$.

On a $R_{0,n}(0) = 0$ et si $x > 0$,

$$R_{0,n}(x) = x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx} = \frac{x\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

et ainsi $R_{0,n}(x) = \mathrm{e}^{-(n+1)x} g_0(x)$.

Alors comme

$$\left| \int_0^1 R_{0,n}(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^1 |R_{0,n}(x)|\mathrm{d}x \leqslant B \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\mathrm{d}x = \frac{B}{n+1}(1-\mathrm{e}^{-(n+1)}) \leqslant \frac{B}{n+1}$$

on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 R_{0,n}(x)\mathrm{d}x = 0$$

et ainsi

$$\int_0^1 g_0(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_{0,n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (S_{0,n}(x)+R_{0,n}(x))\mathrm{d}x = \int_0^1 S_{0,n}(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 R_{0,n}(x))\mathrm{d}x$$

avec $\int_0^1 R_{0,n}(x))\mathrm{d}x$ qui converge vers 0 et

$$= \int_0^1 S_{0,n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} g_{0,k}(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 g_{0,k}(x)\mathrm{d}x$$

qui admet alors une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et ainsi

$$\int_0^1 g_0(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_{0,n}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_{0,n}(x)\mathrm{d}x.$$