Devoir en temps libre n°4

Exercice A

Nous disposons d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés $D1$ et $D2$.
La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.
Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé $D1$ a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé $D2$ a 2 faces rouges et 4 blanches.
L'expérience est la suivante :
– nous commençons par jeter la pièce,
– si nous obtenons pile, nous choisissons le dé $D1$, sinon nous choisissons le dé $D2$, choix définitif pour la suite de l'expérience,
– ensuite nous jetons plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, nous notons la couleur obtenue.
Nous nommons les événements suivants :
– D_1 est l'événement : « nous jouons avec le dé $D1$ »,
– D_2 est l'événement : « nous jouons avec le dé $D2$ »,
– pour tout entier naturel n, R_n est l'événement « nous avons obtenu une face rouge au $n^{\text{ème}}$ lancer du dé choisi ».

1. Quelles sont les valeurs de $P(D_1)$? $P(D_2)$?
   Montrer que $\{D_1, D_2\}$ constitue un système complet d'événements.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelles sont les valeurs de $P_{D_1}(R_n)$? de $P_{D_2}(R_n)$?
3. Calculer $P(R_1)$.
4. Établir un lien entre les probabilités $P_{D_1}(R_1)$, $P_{D_1}(R_2)$ et $P_{D_1}(R_1 \cap R_2)$.
   En déduire la valeur de $P(R_1 \cap R_2)$.
5. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}$$
   En déduire que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la valeur de $P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(R_{n+1})$.
6. Calculer $P_{R_1 \cap R_2}(D1)$, puis de manière générale, pour tout entier naturel non nul n, montrer que :
$$P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n + 2}$$
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé $D1$ ou sur le fait d'avoir une face rouge au lancer suivant ? Au fait, que penser de cette question ? [1]

Exercice B

On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs discrètes dans $\mathbb{R}$.

On dit que $X = Y$ en loi si X et Y ont la même loi de probabilité, c'est à dire si
$$\forall a \in \mathbb{R}\,,\ \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(Y = a)$$
On suppose que $X = Y$ presque sûrement, c'est à dire que $\mathbb{P}((X = Y)) = 1$.

1. C'est un ajout personnel au sujet.

1. Que vaut $\mathbb{P}((X \neq Y))$?
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Que dire de $((Y = a), (Y \neq a))$?
3. À l'aide de la question précédente, montrer que $(X = a) \subset (Y = a) \cup (X \neq Y)$.
4. En déduire que $\mathbb{P}(X = a) \leqslant \mathbb{P}(Y = a)$.
5. En déduire que X et Y ont la même loi de probabilité.

Exercice C

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On rappelle que si A et B sont deux événements, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

1. Montrer que si A, B et C sont trois événements, on a
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$
2. Pouvez donnez (sans preuve) la formule pour quatre événements ?
3. (***) Montrer par récurrence sur n, $n \geqslant 1$, que si $A_1, \dots, A_n$ sont n événements, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)$$
4. On propose une autre preuve de cette formule par les indicatrices. Si A est un événement, on considère la fonction dite indicatrice de A
$$\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$$
définie par
$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Quelles sont les valeurs prises par $\mathbb{1}_A$? Montrer alors que $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire, elle qu'elle suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$. Quelle est son espérance ?
   (b) Soit A et B deux événements. Démontrer que
$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A \qquad \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \qquad \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$
   En utilisant l'espérance, déduire que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
   (c) Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements. Montrer que $\mathbb{1}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$.
   (d) Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements 2 à 2 incompatibles. Montrer que
$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}.$$
   (e) Montrer que si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements quelconques, on a
$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1} \cap \cdots \overline{A_n}} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$$
   puis que (***)
$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \leqslant i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.$$
   Conclure à l'aide de l'espérance.

Fin

Exercice A

1. Si nous jouons avec le dé $D1$, cela signifie que l'on a obtenu pile lors du lancer de la pièce et ainsi l'événement $D1$ est en fait l'événement « on obtient pile » et donc

$$P(D_1) = \frac{1}{3}$$

Si nous jouons avec le dé $D2$, cela signifie que l'on a obtenu face lors du lancer de la pièce et ainsi l'événement $D2$ est en fait l'événement « on obtient face » et donc

$$P(D_2) = \frac{2}{3}$$

Soit on choisit le dé $D1$, soit on choisit le dé $D2$ et ainsi $\{D_1, D_2\}$ constitue un système complet d'événements.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Si on choisit le dé $D1$, le dé a 6 faces dont 4 rouges et 2 blanches et ainsi

$$P_{D_1}(R_n) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Si on choisit le dé $D2$, le dé a 6 faces dont 2 rouges et 4 blanches et ainsi et

$$P_{D_2}(R_n) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3. Le système $\{D_1, D_2\}$ étant un système complet d'événements, on a en appliquant la formule des probabilités totales

$$P(R_1) = P_{D_1}(R_1).P(D_1) + P_{D_2}(R_1).P(D_2) = \frac{2}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

4. Sachant que le dé $D1$ est choisi, les lancers sont alors indépendants, d'où

$$P_{D_1}(R_1 \cap R_2) = P_{D_1}(R_1).P_{D_1}(R_2) = \frac{2^2}{3^2}$$

De la même façon, on a

$$P_{D_2}(R_1 \cap R_2) = P_{D_2}(R_1).P_{D_2}(R_2) = \frac{1}{3^2}$$

Le système $\{D1, D2\}$ étant un système complet d'événements, on a en appliquant la formule des probabilités totales

$$P(R_1 \cap R_2) = P_{D1}(R_1 \cap R_2).P(D1) + P_{D2}(R_1 \cap R_2).P(D2) = \frac{2^2}{3^2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}.\frac{2}{3} = \frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}$$

5. Soit un entier naturel non nul n, de même le dé $D1$ étant choisi, les lancers sont indépendants et on a alors

$$P_{D_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{D_1}(R_i) = \frac{2^n}{3^n}$$

et de même

$$P_{D_2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{D_2}(R_i) = \frac{1}{3^n}$$

et ainsi en utilisant de nouveau le système complet d'événements $\{D_1, D_2\}$, on a

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) &= P_{D_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n).P(D_1) + P_{D_2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n).P(D_2) \\ &= \frac{2^n}{3^n}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3^n}.\frac{2}{3} \end{aligned}$$

et ainsi

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}$$

On a alors puisque $P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \neq 0$,

$$\begin{aligned} P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(R_{n+1}) &= \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n+1})}{P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)} \\ &= \frac{\frac{2^{n+1}+2}{3^{n+2}}}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} \\ &= \frac{2^{n+1} + 2}{3(2^n + 2)} = \frac{2^n + 1}{3(2^{n-1} + 1)} \end{aligned}$$

6. Nous avons $P(R_1 \cap R_2) \neq 0$ et $P(D_1) \neq 0$. Ainsi d'après la formule de Bayes,

$$P_{R_1 \cap R_2}(D_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap D_1)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{P_{D_1}(R_1 \cap R_2).P(D_1)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{2^2}{3^2} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{3}$$

De façon générale, on a $P(R_1 \cap \cdots \cap R_n) \neq 0$ et $P(D_1) \neq 0$. Ainsi d'après la formule de Bayes,

$$P_{R_1 \cap \cdots \cap R_n}(D_1) = \frac{P(R_1 \cap \cdots \cap R_n \cap D_1)}{P(R_1 \cap \cdots \cap R_n)} = \frac{P_{D_1}(R_1 \cap \cdots \cap R_n).P(D_1)}{P(R_1 \cap \cdots \cap R_n)} = \frac{\frac{2^n}{3^n} \times \frac{1}{3}}{\frac{2^2+2}{3^{n+1}}}$$

Ainsi on a finalement

$$P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(D1) = \frac{2^n}{2^n + 2}$$

7. À moins de faire l'expérience en aveugle, la question est idiote ; et faire l'expérience en aveugle…

Ceci dit, on rappelle que

$$P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(D1) = \frac{2^n}{2^n + 2} \qquad P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{2^n + 1}{3(2^{n-1} + 1)}$$

On a alors

$$P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(D1) \geqslant P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(R_{n+1})$$

si et seulement si

$$\frac{2^n}{2^n + 2} \geqslant \frac{2^n + 1}{3(2^{n-1} + 1)}$$

soit encore

$$3.2^n(2^{n-1} + 1) \geqslant (2^n + 1)(2^n + 2)$$

si et seulement si

$$3.2^{n-1}(2^n + 2) \geqslant (2^n + 1)(2^n + 2)$$

soit encore

$$3.2^{n-1} \geqslant 2^n + 1 = 2.2^{n-1} + 1$$

soit finalement $2^{n-1} \geqslant 1$, condition vérifiée puisque $n \geqslant 1$. Ainsi il vaut mieux parier que le dé est le dé $D1$ à 4 faces rouges plutôt que de parier que le le prochain lancer donnera une face rouge.

Exercice B

On suppose que $X = Y$ presque sûrement, c'est à dire que $P((X = Y)) = 1$.

1. On a $(X \neq Y) = \overline{(X = Y)}$ et ainsi
$$P((X \neq Y)) = 1 - P((X = Y)) = 1 - 1 = 0$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. La famille $((Y = a), (Y \neq a))$ est une famille complète d'événements puisque
$$(Y = a) \cup (Y \neq a) = (Y = a) \cup \overline{(Y = a)} = \Omega \qquad (Y = a) \cap (Y \neq a) = \emptyset$$
3. On a
$$\begin{aligned}(X = a) &= (X = a) \cap \Omega \\ &= (X = a) \cap ((Y = a) \cup (Y \neq a)) \\ &= \underbrace{((X = a) \cap (Y = a))}_{\subset (Y=a)} \cup \underbrace{((X = a) \cap (X \neq Y))}_{\subset (X \neq Y)} \\ &\subset (Y = a) \cup (X \neq Y)\end{aligned}$$
4. Ainsi
$$\begin{aligned}P((X = a)) &\leqslant P((Y = a) \cup (X \neq Y)) \\ &\leqslant P((Y = a) + P((X \neq Y)) - P((X \neq Y) \cap (Y = a))\end{aligned}$$
Or $P((X \neq Y)) = 0$ et comme $(X \neq Y) \cap (Y = a) \subset (X \neq Y)$, on a aussi $P((X \neq Y) \cap (Y = a)) = 0$. On en déduit que $P(X = a) \leqslant P(Y = a)$.
5. De manière symétrique, en échangeant les rôles de X et Y, on obtient $P(Y = a) \leqslant P(X = a)$. Ainsi $P(X = a) = P(Y = a)$. On en déduit que que X et Y ont la même loi de probabilité.

Exercice C

1. Nous avons en se ramenant à la réunion de deux événements
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}((A \cup B) \cup C) \\ &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - (B \cap C) + \mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - -\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$
2. Avec 4, il semble que
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C \cup D) = &\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) \\ &- \mathbb{P}(A \cap B) - (A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap D) - (B \cap C) - \mathbb{P}(B \cap D) - \mathbb{P}(C \cap D) \\ &+ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap D) + \mathbb{P}(B \cap C \cap D) \\ &- \mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D)\end{aligned}$$
(un à un, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, avec alternance de signe)
3. La formule est déjà vraie pour n événements, avec $n = 1, 2, 3$.
On la suppose vraie pour n événements, avec $n \geqslant 1$. Alors on considère $n + 1$ événements $A_1, \ldots, A_{n+1}$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right)$$

et on applique la propriété au rang 2

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right)$$

et par distributivité de la l'intersection sur la réunion,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)$$

et on applique alors l'hypothèe de récurrence au rang n pour le premier et troisième terme

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = & \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j<n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\ & + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ & - \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_{n+1}) - \cdots \\ & - \boxed{(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \cap A_{n+1}\right)} - \cdots - (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1})\end{aligned}$$

et on décalle l'écriture de la somme encadrée d'un rang (on écrit le terme générique précédent)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = & \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j<n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\ & + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ & - \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_{n+1}) - \cdots \\ & - \boxed{(-1)^{k} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_{i_j} \cap A_{n+1}\right)} - \cdots - (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1})\end{aligned}$$

soit ecnore

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = & \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j<n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\ & + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ & - \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_{n+1}) - \cdots \\ & + \boxed{(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}<i_k=n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)} + \cdots + (-1)^{n+2}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1})\end{aligned}$$

et ainsi on reconnaît bien

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)$$

ce qui achève la récurrence.

4. (a) La fonction $\mathbb{1}_A$ prend les valeurs 0 et 1 et $(\mathbb{1}_A = 0) = \overline{A}$, $(\mathbb{1}_A = 1) = A$ sont bien des événements et ainsi $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire discrète, et comme $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$, elle suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$, et elle est d''éspérence $\mathbb{P}(A)$.

   (b) Soit $\omega \in \Omega$,
   - si $\omega \in A$, $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 0 = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$ - si $\omega \notin A$, $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$ Ainsi $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

On procède de même pour $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$, avec les 4 cas - si $\omega \in A \cap B$
- si $\omega \in A$, $\omega \notin B$
- si $\omega \notin A$, $\omega \in B$
- si $\omega \notin A$, $\omega \notin B$.

De même pour la réunion.

Par linéarité de l'espérance, on a alors en appliquant à $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

(c) On procède par récurrence sur n par exemple, l'héridité étant

$$\mathbb{1}_{A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1}} = \mathbb{1}_{A_1\cap\cdots\cap A_n} \times \mathbb{1}_{A_{n+1}} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \times \mathbb{1}_{A_{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{1}_{A_i}$$

(d) Directement, soit $\omega \in \Omega$,

– si $\omega \in A_1 \cup \cdots A_n$, $\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = 1$ et ω appartient à un seul des A_i, et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} = 1$ aussi.

– si $\omega \notin A_1 \cup \cdots A_n$, $\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = 0$ et ω appartient à aucun des A_i, et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} = 0$ aussi.

Ainsi on a les deux fonctions qui coïncident partout et donc sont égales.

(e) On a par complémentarité

$$\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1\cup\cdots A_n}} 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1}\cap\cdots\overline{A_n}} = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\overline{A_i}} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$$

On a alors en développant le produit (qu'est ce qu'un produit ?)

$$\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \times \cdots \times \mathbb{1}_{A_{i_k}}$$

puis

$$\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}$$

On obtient alors le résultat en appliquant l'espérance qui est linéaire.