Introduction

Dans ce chapitre, nous reviendrons sur les notions essentielles vues en première année sur la dynamique du solide (en tant que système de points matériels).

On considère un système (S) constitué de N points matériels M_i, de masse respective m_i. On considère $(\mathcal{R})$ le référentiel d'étude supposé galiléen. On note $\vec{v}_{M_i}^{(\mathcal{R})} = \vec{v}_i^{(\mathcal{R})}$.

On note m_S la masse totale du système (S) :

$$m_S = \sum_{i=1}^{N} m_i = \sum_i m_i$$

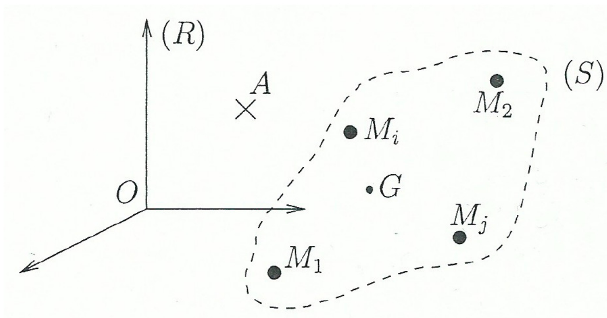

Table des matières

I - Cinématique d'un système de points matériels / cas du solide

1) Centre d'inertie

Définition :
C'est le point G tel que, quelque soit le point A, fixe ou non dans $(\mathcal{R})$, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{AM_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{AM_i}}{m_S}.$$

C'est le barycentre des points M_i affectés des coefficients m_i. G est aussi appelé *centre de masse*.

Propriété :

- G est unique et ne dépend pas de A. En effet, considérons $A' \neq A$. On a :

$$\frac{\sum_i m_i \overrightarrow{A'M_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \left(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM_i}\right)}{\sum_i m_i} = \overrightarrow{A'A} + \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{AM_i}}{\sum_i m_i} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{A'G}$$

- On peut déterminer la vitesse de G en fonction de celles des points M_i. En effet, on considère $A = O$ (centre du référentiel), ce qui donne :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i}.$$

On dérive par-rapport au temps dans $(\mathcal{R})$ ce qui donne :

$$\vec{v}_G^{(\mathcal{R})} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i^{(\mathcal{R})}}{\sum_i m_i}.$$

- En prenant en particulier $A = G$, on a :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}\,;$$

Cette relation est une autre façon de définir le centre d'inertie G.

- **Cas particulier de deux points** : M_1 et M_2. G est situé entre M_1 et M_2. En effet, on a :

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0} = m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\left(\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}\right)$$

Soit

$$\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{M_1M_2}$$

De même, on peut montrer que

$$\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{M_1M_2}$$

G est donc bien entre M_1 et M_2. Il est d'autant plus proche d'un point que celui-ci a une masse importante.
Si $m_1 = m_2$, G est au milieu de $[M_1, M_2]$.
Si $m_1 \gg m_2$, $\overrightarrow{GM_1} \approx \vec{0}$, c'est-à-dire $G \approx M_1$. C'est par exemple le cas du couple Soleil-planète. Le centre d'inertie est quasiment confondu avec le centre du Soleil.
On pourra généraliser le fait que G se trouve vers les points de masses les plus grandes.

2) Éléments cinématiques d'un système de points matériels

→ **Quantité de mouvement ou résultante cinétique de (S)**

Définition :
La quantité de mouvement du système (S) est donnée par

$$\vec{p}_S^{(\mathcal{R})} = \sum_i \vec{p}_i^{(\mathcal{R})}$$

Remarque :

— *Expression simple* dans le cas où les masses m_i sont des constantes.

$$\vec{p}_S^{(\mathcal{R})} = \sum_i m_i \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}}{\mathrm{d}t}\right)_{(\mathcal{R})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}\right)_{(\mathcal{R})}$$

$$\text{d'où} \quad \vec{p}_S^{(\mathcal{R})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_S \overrightarrow{OG}\right)_{(\mathcal{R})} = m_S \vec{v}_G^{(\mathcal{R})}$$

— La quantité de mouvement de (S) est la même que celle qu'aurait un point matériel de masse m_S situé en G.

— **Cas particulier de deux points** : $\vec{p}_S^{(\mathcal{R})} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

→ **Moment cinétique du système (S)**

Définition :

Le moment cinétique du système (S) par-rapport à un point A, fixe ou non, est donné par

$$\vec{\sigma}_S^{(\mathcal{R})}(A) = \sum_i \vec{\sigma}_i^{(\mathcal{R})}(A) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_i^{(\mathcal{R})}$$

Le moment cinétique du système (S) par-rapport à un axe (Δ) orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}$ est donné par

$$\sigma_S^{(\mathcal{R})}(\Delta) = \vec{\sigma}_S^{(\mathcal{R})}(A).\vec{u} = \left(\sum_i \vec{\sigma}_i^{(\mathcal{R})}(A)\right).\vec{u} = \sum_i \sigma_i^{(\mathcal{R})}(\Delta)$$

→ **Énergie cinétique du système (S)**

Définition :

$$E_{c,S}^{(\mathcal{R})} = \sum_i E_{c,i}^{(\mathcal{R})} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{v}_i^{(\mathcal{R})}\right]^2$$

3) Cas particulier : solide en rotation autour d'un axe fixe

Définition :

Un solide est un système indéformable de points, c'est-à-dire que pour tout point M_i et M_j $(i \neq j)$ de (S), on a $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$ = constante. On a également, quelque soit M_i, GM_i = constante.

Le mouvement d'un solide doit être décrit par 6 paramètres : les 3 coordonnées de son centre de gravité, et les 3 angles d'éventuelles rotations autour de son centre de gravité.

a) Solide en translation

Définition :

Un solide est en **translation** lorsque tous les points qui le constituent ont le *même* vecteur vitesse.

⇝ La translation peut être rectiligne lorsque son centre de gravité a un mouvement rectiligne,

⇝ la translation peut être circulaire lorsque son centre de gravité a un mouvement circulaire.

Propriété : E_c de (S)

$$E_{c,S}^{(\mathcal{R})} = \frac{1}{2} m_S \left(\vec{v}_G^{(\mathcal{R})}\right)^2$$

Cette expression est l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m_S situé en G. Un solide en translation peut être considéré comme un point matériel (cf modèle du point matériel).

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ)

Définition :
On définit le moment d'inertie du solide (S) par-rapport à l'axe (Δ) :

$$J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$$

A Retenir

$$\boxed{\sigma_S^{(\mathcal{R})}(\Delta) = J_\Delta \Omega}$$

$$\boxed{E_{c,S}^{(\mathcal{R})}(\Delta) = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2}$$

II - Dynamique du solide en référentiel galiléen

1) Théorème de la résultante cinétique (ou de la quantité de mouvement)

Théorème :
Soit (S) un système de points matériels dans un référentiel ($\mathcal{R}$) galiléen

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}_S^{(\mathcal{R})}}{\mathrm{d}t}\right)_{(\mathcal{R})} = \vec{F}_{ext}}$$

Remarque :
- Autre écriture (si $m_S = cste$) : $m_S \vec{a}_G^{(\mathcal{R})} = \vec{F}_{ext}$
- Théorème valable pour un système quelconque de points matériels OU pour un solide...
- N'intervient ici QUE la résultante des forces **extérieures** au système ; les forces intérieures se simplifient grâce au principe des actions réciproques.

2) Théorème du moment cinétique par-rapport à un axe fixe orienté (Δ)

a) Énoncé

Expression pour un solide uniquement !

Théorème :
Soit (S) un SOLIDE dans un référentiel ($\mathcal{R}$) galiléen

$$\boxed{J_\Delta \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = J_\Delta \dot{\Omega} = \mathcal{M}_{ext}(\Delta)}$$

b) Notion de point d'application

Définition :
On dit que la résultante $\vec{F}_{ext}$ s'applique au point P_{ap} si son moment par-rapport à P_{ap} est nul : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(P_{ap}) = \vec{0}$

Conséquence : si $\vec{F}_{ext}$ s'applique en P_{ap}, alors pour tout A
La résultante $\vec{F}_{ext}$ est alors représentée par un vecteur unique dessiné à partir de P_{ap}.

Exemple important : le poids.

Le poids de (S) est donné par : $\vec{P} = \sum_i m_i\vec{g} = m_S\vec{g}$.
De plus :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{P}}(A) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge_i \vec{g} = \left(\sum_i m_i\overrightarrow{AM_i}\right)\vec{g}$$

En particulier, si A=G (centre de masse du système) :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{P}}(G) = \left(\sum_i m_i\overrightarrow{GM_i}\right)\vec{g} = \vec{0},$$

par définition du centre de masse.
Le poids d'un système (S) s'applique au centre de masse G du système.

3) Théorème de la puissance cinétique (cas du solide)

Théorème :
Soit (S) un SOLIDE dans un référentiel $(\mathcal{R})$ galiléen

$$\boxed{J_\Delta\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{ext}}$$