Les expressions des opérateurs différentiels dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques ne sont pas à connaître. Toutes les autres formules le sont.

I - Opérateur gradient

Si f est un champ scalaire, alors $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est un champ vectoriel. Il indique la direction de plus grande variation (spatiale)de f.

En coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

II - Opérateur divergence

Si $\vec{A}$ est un champ vectoriel, alors $\text{div}\vec{A}$ est un champ scalaire. Elle renseigne sur la propension de $\vec{A}$ à converger ou à diverger localement autour d'un point $\vec{r}$ de l'espace.

En analyse vectorielle, le **théorème de la divergence** (également appelé **théorème de Green-Ostrogradski** ou théorème de flux-divergence), affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel $\vec{A}$ sur un volume dans $\mathbb{R}^3$ et le flux de ce champ à travers la frontière du volume (qui est une intégrale de surface).

$$\iiint_V \text{div}\,\vec{A}(M,t)\text{d}^3\tau_M = \oiint_S \vec{A}.\overrightarrow{\text{d}S}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\text{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

En coordonnées sphériques :

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial (\sin(\theta)A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Remarque : la divergence est en m^{-1} (comme une dérivée spatiale).

III - Opérateur rotationnel

Si $\vec{A}$ est un champ vectoriel, alors $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ est un champ vectoriel. Il renseigne sur la propension de $\vec{A}$ à tourner localement autour de $\vec{r}$

Soit un contour fermé $\mathscr{C}$, enfermant une surface S ; le **théorème de Stokes** donne :

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{A}.\text{d}\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}.\overrightarrow{\text{d}S}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial\left(\sin(\theta)A_\varphi\right)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_r$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\varphi$$

Remarque : le rotationnel est en m^{-1} (comme une dérivée spatiale).

IV - Laplacien scalaire

Si f est un champ scalaire, alors Δf est un champ scalaire.

En coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Remarque : le Laplacien est en m^{-2} (comme une dérivée seconde spatiale).

V - Laplacien vectoriel

Si $\vec{A}$ est un champ vectoriel, $\Delta\vec{A}$ (ou $\vec{\Delta}\vec{A}$) est un champ vectoriel ; les composantes de $\vec{\Delta}\vec{A}$ correspondent au laplacien scalaire appliqué à chaque composante de $\vec{A}$.

VI - Opérateur "v scalaire gradient"

1) Pour un scalaire

Si f est un champ scalaire et $\vec{v}$ un champ de vecteurs, alors $\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$ est un champ scalaire, et c'est simplement le produit scalaire de $\vec{v}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$. En coordonne ?es cartésiennes seulement, il s'exprime par

$$\boxed{\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}}$$

2) Pour un vecteur

Si $\vec{b}$ et $\vec{v}$ sont des champs de vecteurs, alors $\left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{b}$ est un champ vectoriel. Ici les parenthèses sont importantes !

En coordonnées cartésiennes il s'exprime par :

$$\boxed{\left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{b} = v_x\frac{\partial \vec{b}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \vec{b}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \vec{b}}{\partial z}}$$