Introduction

Nous étudierons dans ce chapitre l'ensemble des phénomènes et les lois concernant les propriétés et les interactions mutuelles des charges électriques au repos, sous entendu dans un référentiel donné. Les distributions de charges sont alors invariables dans le temps et constituent la source d'un champ électrique permanent (stationnaire) qui est alors appelé *champ électrostatique*.

Après avoir présenté la notion de champ électrostatique et ses propriétés, nous étudierons quelques exemples concrets et fondamentaux permettant d'introduire des résultats importants dans cette branche de la physique. Nous terminerons notre étude en mettant en évidence l'existence d'analogies avec le champ gravitationnel.

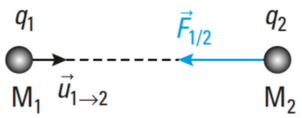
Table des matières

I - De la loi de Coulomb au champ électrostatique : cas d'une charge ponctuelle

1) Loi de Coulomb

La loi de Coulomb [1] décrit l'interaction entre deux charges électriques ponctuelles immobiles dans le vide. Soit la charge q_1, placée au point M_1, et la charge q_2, placée au point M_2.

Loi de Coulomb



La force $\vec{F}_{1/2}$ exercée par la charge ponctuelle q_1 sur la charge ponctuelle q_2 a pour expression :

$$\vec{F}_{1/2} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{1\to 2}$$

1. Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), physicien français, établit les lois théoriques et expérimentales de l'électrostatique.

Remarque :
- La constante k dépend du milieu. Dans le vide, elle vaut $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ SI, où ε_0 est la permittivité absolue du vide. L'unité de k se retrouve à partir de l'expression de la force d'interaction :
  $k = \frac{F_{1/2}r_{12}^2}{q_1q_2}$ dont l'unité est kg.m^3.s^{-4}.A^{-2}
- Le vecteur unitaire $\vec{u}_{1\to2}$ est orienté de M$_1$ vers M$_2$ sur la droite (M$_1$M$_2$) : $\vec{u}_{1\to2} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{||\overrightarrow{M_1M_2}||}$
- De même, la charge q_1, subit de la part de la charge q_2 la force :

$$\vec{F}_{2/1} = k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{2\to1} = -k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{1\to2} = -\vec{F}_{1/2}$$

  Ce résultat est prévisible, car il exprime la troisième loi de Newton de la mécanique, aussi appelée **principe des actions réciproques.**
- Deux charges q_1 et q_2 de même signe se repoussent, alors que deux charges q_1 et q_2 de signes contraires s'attirent.

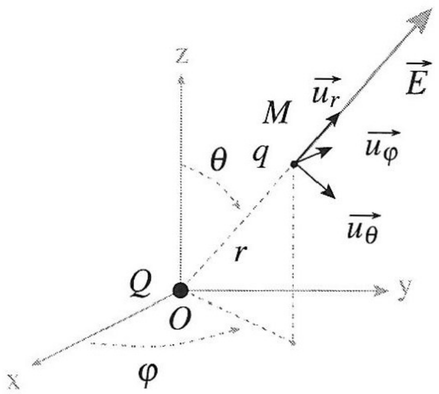
2) Champ et potentiel électrostatique créés par une charge ponctuelle

a) Champ électrostatique

Une charge Q est placée à l'origine du système de coordonnées. D'après la loi de Coulomb, une charge test q placée en M à distance r subit la force

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

qui peut être identifiée à la partie électrique de la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$ déjà rencontrée.



Définition : La charge ponctuelle Q placée en O crée en un point M situé à la distance r de O le champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

exprimé en V.m^{-1} (norme de $\vec{E}$), où $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||}$

Application : Proton et électron de l'atome d'hydrogène peuvent être modélisés par des charges ponctuelles (dans une première approximation). Dans ces conditions, le champ électrostatique créé par le noyau au niveau de l'électron (à une distance $r \approx 10^{-10}$ m) est $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \approx 10^{11}$ V.m^{-1}, qui est un champ très intense ; à titre de comparaison le champ électrique au sommet d'un clocher par temps d'orage peut atteindre 3 MV.m^{-1}.

Remarque :
- On remarque que le champ électrostatique créé par une charge positive et celui créé par une charge négative ont des sens opposés (signe de q_0).
- On constate de plus que lorsque M et O sont confondus, $r \to 0$ et le champ diverge : donc le champ n'est pas défini sur la charge.

b) Potentiel électrostatique

On peut également ajouter que la force $\vec{F}$ ci-dessus se met sous la forme d'un gradient, manifestation de son caractère *conservatif* :

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$$

Comme $\vec{F} = q\vec{E}$, il vient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$$

Définition : Le **potentiel électrostatique** V est défini par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

A RETENIR

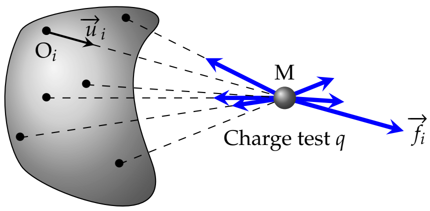
Le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle Q à une distance r de celle-ci est

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Remarque :
V est défini à une constante près, tout comme l'énergie potentielle $E_p = qV$. Le choix opéré ici consiste à fixer l'origine d'énergie potentielle à une distance infinie de Q.

3) Principe de superposition : cas d'un ensemble de charges ponctuelles

Soient N charges ponctuelles Q_i placées respectivement aux points O_i.
D'après le théorème de superposition, les champs électrostatiques créés au point M par les N charges s'ajoutent.



Définition :
Le champ $\vec{E}$ créé en M par N charges ponctuelles Q_i placées en O_i s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{u}_i$$

où $\vec{u}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \frac{\overrightarrow{O_iM}}{\|\overrightarrow{O_iM}\|}$ est le vecteur unitaire de la droite (O_iM) dirigé de O_i vers M.

On peut également appliquer ce principe de superposition à la fonction potentiel électrostatique.
Le potentiel électrostatique V créé en un point M par un ensemble de N charges potentielles Q_i placées en O_i (avec $r_i = O_iM$) vaut :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

Lorsque les points M et O_i sont confondus, $r_i \to 0$ et le potentiel diverge : le potentiel n'est donc pas défini (on a également imposé la nullité du potentiel électrostatique lorsque M est très loin de l'assemblée de charges ponctuelles.).

4) Circulation du champ électrostatique ; conséquence

Considérons deux points M_1 et M_2, ainsi qu'un point O au niveau duquel on a une charge ponctuelle Q. Les points M_1 et M_2 sont à une distance respective r_1 et r_2 de O. On peut calculer la *circulation* du champ électrostatique $\vec{E}$ entre M_1 et M_2 qui correspond à la quantité :

$$C = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est le vecteur déplacement élémentaire le long du chemin (imaginaire) entre M_1 et M_2.

$$C = -\int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V.\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\int_{V(M_1)}^{V(M_2)} \mathrm{d}V = V(M_2) - V(M_1)$$

cette quantité ne dépend donc pas du chemin suivi pour aller de M_1 à M_2. De plus, si le chemin suivi est fermé ($M_1 \equiv M_2$) et on obtient $C = 0$

Propriété :

La circulation du champ électrostatique ne dépend pas du chemin suivi et est nulle le long d'un contour fermé. On dit que le champ électrostatique est un *champ à circulation conservative*.

La conséquence essentielle du caractère conservatif de la circulation du champ électrostatique est la suivante : calculons cette circulation sur un contour fermé $\mathscr{C}$ et utilisons le théorème de Stokes (vu en mécanique des fluides !)

$$\oint_{(\mathscr{C})} \vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0 = \iint_{(S)} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

où S est la surface enfermée par le contour fermé $\mathscr{C}$. Nous constatons ainsi que le rotationnel de ce champ est nul en tout point M de l'espace où il est défini.

Propriété :

Le champ électrostatique vérifie l'équation locale

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}}$$

Remarque :

- Nous avons établi plusieurs résultats et propriétés fondamentales de l'électrostatique, en prenant comme sources du champ une ou plusieurs charges discrètes. **Tous ces résultats se généralisent à des distributions continues de charge**. Les résultats qui suivront concerneront aux- aussi à la fois les distributions de charges discrètes et continues.
- La circulation du champ électrique qui ne dépend pas du chemin suivi nous donne un argument supplémentaire pour justifier l'existence du potentiel électrostatique, car le travail W de la force électrostatique est égal à $-qC$ ($\vec{F}.\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ au lieu de $\vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ dans l'intégrale ci-dessus).
- L'équation ci-dessus $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$ est un cas particulier de la première **équation de Maxwell** que nous rencontrons : il s'agit de l'équation de *Maxwell-Faraday* de l'électrostatique.

II - Propriétés de symétrie et d'invariance des sources

1) Distributions de charge

Les distributions de charge peuvent être discrètes (comme vu dans le I) ou continues. Dans ce dernier cas, la description naturelle est la donnée du champ de densité volumique de charge $\rho(M)$.

Néanmoins, il arrive parfois que certaines dimensions de la distribution soient négligeables devant d'autres. Ainsi, une couche de faible épaisseur (devant sa longueur et sa largeur) est assimilée à une nappe bidimensionnelle, et un câble de petit rayon (devant sa longueur) à un fil.

La distribution de charge est alors caractérisée par la densité surfacique de charge $\sigma(M)$ ou la densité linéique de charge $\lambda(M)$

Exemple : Pour une nappe d'épaisseur e et de densité volumique de charge ρ uniforme, la charge δQ dans le volume $dS.e$ est $\delta Q = \rho e dS$; dans le cadre d'une modélisation surfacique, on note $\sigma = \rho.e$ la densité surfacique de charge et alors $\delta Q = \sigma dS$.

Exemple : Pour un câble de section s et de densité volumique de charge ρ uniforme, la charge $\delta Q'$ dans le volume $d\ell.s$ est $\delta Q' = \rho s d\ell$; dans le cadre d'une modélisation linéique, on note $\lambda = \rho.s$ la densité linéique de charge et alors $\delta Q' = \lambda d\ell$.

2) Invariance par une transformation

Définition :
Un objet est **invariant par une transformation** lorsque son image est confondue avec l'objet de départ.

Exemple :

- *Plan infini uniformément chargé* :
  pour le plan orthogonal à (Oz), la distribution est invariante par toutes les translations d'axe (Ox) et (Oy), donc $\rho(M)$ est indépendante des variables x et y. Ainsi $\rho(z)$ en coordonnées cartésiennes.
- *Charge ponctuelle* :
  La distribution est invariante par toutes les rotations autour de l'origine (où se trouve la charge), donc $\rho(M)$ est indépendante des variables θ et φ. Ainsi $\rho(r)$ en coordonnées sphériques.
- *boule uniformément chargée* :
  La distribution est invariante par toutes les rotations autour de l'origine (où se trouve la charge), donc $\rho(M)$ est indépendante des variables θ et φ. Ainsi $\rho(r)$ en coordonnées sphériques.
- *cylindre homogène infini d'axe (Oz)* :
  La distribution est invariante par toute rotation d'angle θ quelconque autour de l'axe (Oz) et par toute translation d'axe (Oz), donc $\rho(M)$ est indépendante des variables θ et z. Ainsi $\rho(r)$ en coordonnées cylindriques.
- *disque uniformément chargé d'axe (Oz)* :
  La distribution est invariante par toute rotation d'angle θ quelconque autour de l'axe (Oz), donc $\rho(M)$ est indépendante de la variable θ. Ainsi $\rho(r, z)$ en coordonnées cylindriques.

3) Considérations de symétries

Définition :
→ (Π_+) est **plan de symétrie de la distribution de charges** si la densité volumique de charge est identique de part et d'autre de (Π_+), c'est-à-dire si elle est inchangée par réflexion à travers (Π_+).
→ (Π_-) est **plan d'antisymétrie de la distribution de charges** si la densité volumique de charge est changée en son opposée par réflexion à travers (Π_-) : on parle de conjugaison de charge.

Par exemple, le plan médiateur du segment reliant les deux charges d'un doublet de deux charges identiques est un plan de symétrie de la distribution de charges.

Au contraire, le plan médiateur du segment reliant les deux charges d'un doublet de deux charges opposées est un plan d'antisymétrie de la distribution de charges.

Remarque :
Lorsqu'une distribution de charges admet un plan d'antisymétrie, sa charge totale est nécessairement nulle. En effet, on peut alors associer deux à deux les éléments de volume symétriques l'un de l'autre par ce plan qui portent donc des charges opposées.

Exemple :

- *Plan infini uniformément chargé* :
  pour le plan orthogonal à (Oz), la distribution de charges admet pour plans de symétries le plan xOz (et tous les paralléles), ainsi que le plan yOz (et tous les parallèles).
- *Charge ponctuelle* :
  La distribution de charges admet comme plans de symétrie tous les plans qui passent par l'origine O où se trouve la charge ponctuelle.
- *boule uniformément chargée* :
  La distribution de charges admet comme plans de symétrie tous les plans qui passent par le centre O de la boule.
- *cylindre homogène infini d'axe (Oz)* :
  La distribution de charges admet pour plans de symétrie, tous les plans orthogonaux à (Oz)

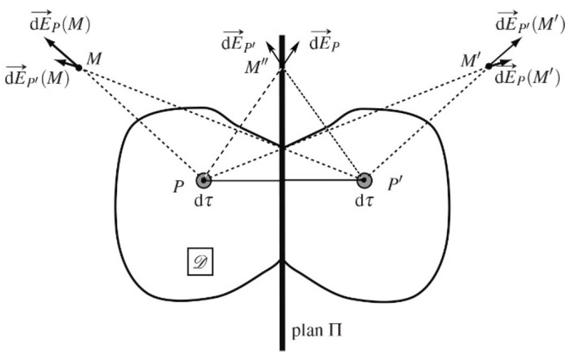
4) Principe de Curie et conséquence pour le champ

Principe :
Principe de Curie : les symétries des causes se retrouvent dans les effets qu'elles produisent.

Conséquence : d'après ce principe de Curie, le champ électrostatique hérite **des symétries** de la distribution de charges qui lui donne naissance, **et en particulier de ses invariances**.

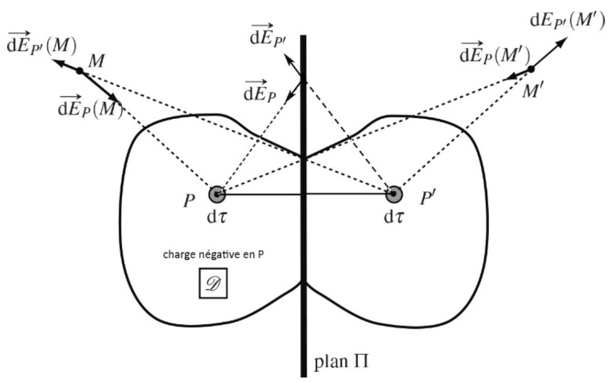
De plus, soit (Π_+) un plan de symétrie de la distribution de charges, P et P' deux points de la distribution de charges, symétriques par-rapport au plan, M et M' deux points de l'espace symétriques par-rapport au plan. D'après le principe de Curie, $\overrightarrow{\mathrm{d}E_{P'}}(M')$ est le symétrique de $\overrightarrow{\mathrm{d}E_P}(M)$ (il en est de même pour $\overrightarrow{\mathrm{d}E_P}(M')$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}E_{P'}}(M)$) ; le champ résultant (par superposition) $\vec{E}(M)$ sera alors également le symétrique de $\vec{E}(M')$.

Si maintenant on considère le point M'' sur le plan de symétrie, $\overrightarrow{\mathrm{d}E_{P'}}$ est symétrique à $\overrightarrow{\mathrm{d}E_P}$: la superposition de ces deux champs est comprise dans le plan de symétrie, il en est de même pour la distribution totale.



Soit (Π_-) un plan d'antisymétrie de la distribution de charges, P et P' deux points de la distribution de charges, symétriques par-rapport au plan (les charges en P et P' sont opposées), M et M' deux points de l'espace symétriques par-rapport au plan. D'après le principe de Curie, $\overrightarrow{\mathrm{d}E_{P'}}(M')$ est l'antisymétrique de $\overrightarrow{\mathrm{d}E_P}(M)$ (il en est de même pour $\overrightarrow{\mathrm{d}E_P}(M')$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}E_{P'}}(M)$) ; le champ résultant (par superposition) $\vec{E}(M)$ sera alors également l'antisymétrique de $\vec{E}(M')$.

Si maintenant on considère le point M'' sur le plan de symétrie, $\overrightarrow{\mathrm{d}E_{P'}}$ est antisymétrique à $\overrightarrow{\mathrm{d}E_P}$: la superposition de ces deux champs est orthogonale au plan d'antisymétrie, il en est de même pour la distribution totale.



A Retenir

- Si $\rho(M)$ ne dépend pas de certaines variables (d'espace...), alors $\vec{E}$ n'en dépend pas non plus.
- En un point M appartenant à un plan de symétrie de la distribution de charges, $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan ; en un point M appartenant à un plan d'antisymétrie de la distribution de charges, $\vec{E}(M)$ est orthogonal à ce plan

ATTENTION !! Les propriétés liées à la direction du champ électrostatique sont valables qu'en des points appartenant aux plans de symétrie ou d'antisymétrie. Les appliquer en dehors de ces plans constitue une erreur classique.

Distributions classiques des exemples précédents :

III - Théorème de Gauss

1) Énoncé et forme locale

Considérons une distribution quelconque de charges dans le vide. Elle crée un champ $\vec{E}$ dont on veut déterminer l ?expression. Il faudra au préalable étudier les symétries et invariances, car le théorème ci-dessous n'est applicable qu'aux distributions ayant de hautes symétries et invariances. ? ?

Théorème :

Théorème de Gauss

Le flux du champ $\vec{E}$ à travers une surface fermée (S) (appelée *surface de Gauss*) est proportionnel à la charge Q_{int} contenue dans le volume V délimité par la surface (S).

$$\boxed{\oiint_{(S)} \vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Notons V le volume enfermé par la surface fermée (S) et utilisons le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\mathrm{d}\tau$$

Lorsque la distribution de charges est continue, en notant ρ la densité volumique de charges, on a aussi : $Q_{int} = \iiint \rho\mathrm{d}\tau$. Le théorème de Gauss s'écrit donc aussi sous la forme équivalente :

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\mathrm{d}\tau$$

A Retenir

On en déduit alors une formulation locale du théorème de Gauss :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

qui porte le nom d'**équation de Maxwell-Gauss**

2) Méthode

Considérons une distribution quelconque de charges dans le vide. Elle crée un champ E dont on veut déterminer l'expression. Après avoir effectué l'étude des symétries et invariances, on applique le théorème de Gauss pour déterminer l'expression du champ.

1. Détermination de la forme du champ par une analyse des symétries **de la distribution de charges** en deux temps :
   — détermination des transformations qui laissent la distribution de charges (donc le champ) invariante ;
   — détermination de la direction du champ en un point M quelconque en cherchant des plans de symétrie ou d'anti-symétrie pour la distribution de charges **passant par M !!**
2. Choix d'une surface de Gauss (fermée...) adaptée à la forme du champ ;
3. Calcul du flux de $\vec{E}$ à travers cette surface fermée et de la charge intérieure ;
4. Conclusion.

3) Exemple : champ créé par un cylindre uniformément chargé

IV - Propriétés topographiques

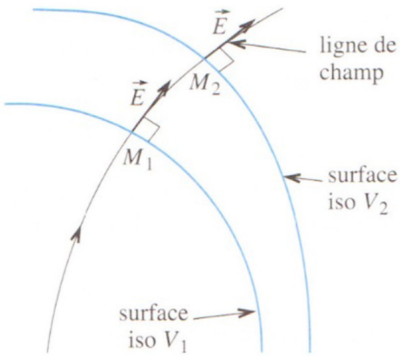
1) Définitions

Définition :
Lignes de champ
Les lignes de champ sont telles qu'en chacun de leurs points M, le vecteur $\vec{E}$ leur est tangent.

Le long d'une ligne de champ, la valeur du champ $\vec{E}$ peut varier. Le tracé d'une carte de lignes de champ ne permet donc d'en connaître que la direction en tout point. On oriente chaque ligne de champ par une flèche donnant le sens du champ sur la ligne.

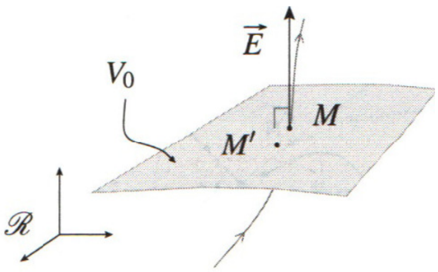
Définition :
Surface équipotentielle (ou iso-potentiel)
Une surface équipotentielle est définie par l'ensemble des points où la valeur du potentiel électrostatique reste constante.

2) Champ électrique orienté vers les potentiels décroissants



Propriété : Le long d'une ligne de champ, le champ $\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants.

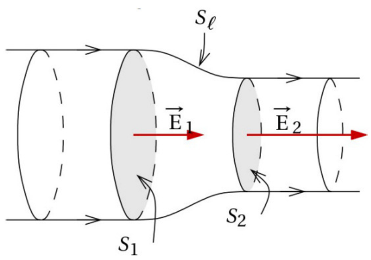
3) Champ électrique perpendiculaire aux équipotentielles



Propriété :
Les lignes de champ sont en tout point orthogonales aux équipotentielles

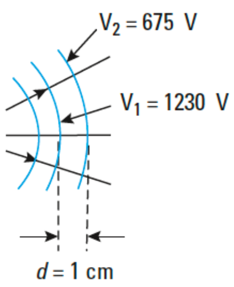
La connaissance de l'ensemble des lignes de champ permet donc de tracer les surfaces équipotentielles, de même que la connaissance de l'ensemble des équipotentielles permet de trouver la direction du champ en tout point.

4) Conservation du flux électrique en un lieu vide de charge



La conséquence est la suivante : **l'évasement des tubes de champ électrostatique loin des sources traduit une diminution de l'intensité de ce champ.**

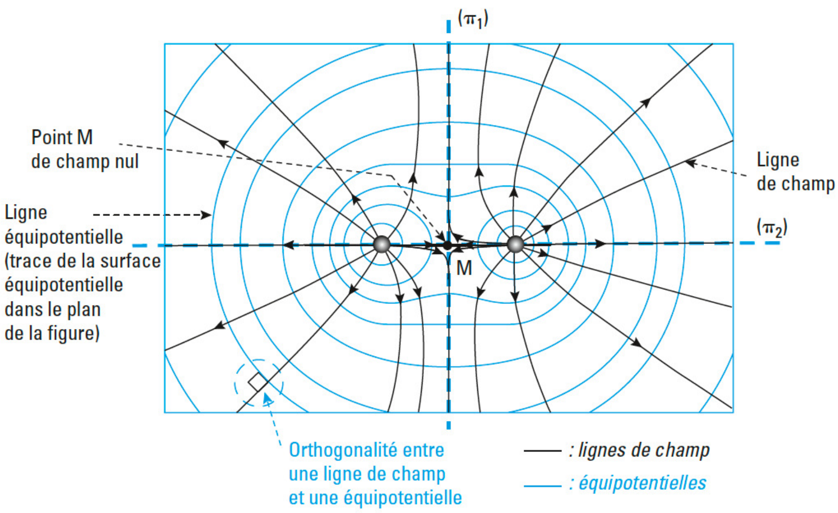
5) Valeur du champ et surfaces équipotentielles successives



J'ai reproduit une partie d'une carte de champ (voir ci-dessous) en y ajoutant l'échelle d'espace et deux valeurs du potentiel V. Nous pouvons calculer une valeur moyenne du champ en évaluant le gradient de potentiel entre les équipotentielles $V = V_1$ et $V = V_2$: $E \approx \frac{V_1 ? V_2}{d} \approx 55{,}5$ kV.m^{-1}.

6) Cartes de lignes de champs

Étudions à présent une carte de champ associée à deux charges ponctuelles q :



— Les lignes de champ ne sont pas des courbes fermées, elles se dirigent ici vers l'infini (elles peuvent aussi se diriger vers une charge de signe contraire) ;

— **Toutes les lignes divergent à partir des charges ponctuelles : ces charges sont donc toutes deux positives** ; (le théorème de Gauss sous sa forme locale fait ressortir que le champ électrostatique diverge depuis sa source si la densité de charges ρ y est localement positive.)

— Deux lignes de champ distinctes ne peuvent se couper excepté en un point de champ nul (sinon, le champ devrait avoir deux directions ou deux sens distincts en ce point !). Le champ est donc ici nul au point M ;

— Les lignes de champ sont symétriques de part et d'autre des plans (Π_1) et (Π_2) dont on a donné les traces en traits pointillés dans le plan de la figure : ceci illustre que ce sont deux plans de symétrie pour la distribution de charges (ici deux charges ponctuelles de même signe) ;

— Les lignes équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ : **on peut déduire les lignes équipotentielles d'une carte de champ et inversement**. Les surfaces équipotentielles sont sphériques au voisinage immédiat de chacune des charges : à proximité d'une charge, le champ global est peu différent de celui créé par cette charge donc radial autour d'elle. On remarque également qu'à grande distance des deux charges, les équipotentielles tendent vers des sphères orthogonales aux lignes de champ : à grande distance, la distribution est vue comme une unique charge ponctuelle Q.

Carte de champ de deux charges de signe contraire :