

Application 1 : l'effet Doppler acoustique

On s'intéresse à un point matériel M qui émet un "bip" avec une période T_0 dans son référentiel propre. Un observateur fixe dans le référentiel d'étude, en O, reçoit le "bip" émis par $M(t_1)$ à la date t'_1 et celui émis par $M(t_2)$ à la date t'_2 . M se déplace en ligne droite avec la vitesse $\vec{v}$ constante, et l'onde sonore a la célérité c_s .

1. Exprimer la période T séparant les deux "bips" reçus par l'observateur, en fonction de T_0 , c_s , $OM(t_1)$ et $OM(t_2)$.
2. En supposant le mobile suffisamment loin ($OM(t_1) \gg M(t_1)M(t_2)$), exprimer $OM(t_2) - OM(t_1)$ en fonction de T_0 et v_x , la projection de la vitesse de l'émetteur suivant le vecteur $\vec{OM}(t_1)$.
3. Dans le cas où $v \ll c_s$, montrer que v , la fréquence de l'onde dans le référentiel du récepteur vérifie

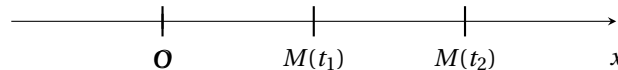
$$v = v_0 \left(1 - \frac{v_x}{c_s}\right)$$

où v_0 est la fréquence dans le référentiel de l'émetteur.

4. Expliquer brièvement l'effet Doppler. Quand rencontre-t-on ce phénomène, dans la vie de tous les jours?
5. En utilisant les résultats ci-dessus, expliquer le bang supersonique entendu lorsqu'un avion "passe le mur du son".

Solution :

1. On considère un observateur fixe en O, et un objet mobile qui émet des "bips" à intervalle régulier (période T_0). Ce mobile émet un bip à l'instant t_1 en $M(t_1)$, se déplace à la vitesse v , puis émet un second "bip" à l'instant t_2 (à la position $M(t_2)$). On a représenté cette situation.



Dans son référentiel, l'observateur reçoit le premier "bip" à l'instant t'_1 , et le second à l'instant t'_2 ; la période T entre les deux "bips" est donc $T = t'_2 - t'_1$. Faisons maintenant intervenir les temps t_1 et t_2 :

$$\begin{aligned} T &= t'_2 - t'_1 \\ &= t'_2 - t_2 - (t'_1 - t_1) + \underbrace{t_2 - t_1}_{=T_0} \\ &= \frac{1}{c_s} OM(t_2) - \frac{1}{c_s} OM(t_1) + T_0 \\ &= T_0 + \frac{1}{c_s} (OM(t_2) - OM(t_1)) \end{aligned}$$

$c_s(t'_1 - t_1) = OM(t_1)$ car le premier "bip" est émis en $M(t_1)$ à l'instant t_1 et est détecté par l'observateur en O à l'instant t'_1 ; de même pour le deuxième "bip".

2. Dans le cadre de l'hypothèse de l'énoncé, le mobile se déplace à la vitesse $\vec{v}$ entre deux "bips". Dans cet intervalle de temps, il parcourt donc la distance $v_x \cdot (t_2 - t_1) = v_x \cdot T_0$. Ici, le sens de la vitesse est le même que celui de $\vec{OM}(t_1)$, v_x est donc une grandeur positive. Si le mobile se rapproche de l'observateur, alors $v_x < 0$. On obtient alors :

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{v_x}{c_s}\right).$$

3. D'après le résultat sur les périodes, on trouve que

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{v_x}{c_s}} \approx v_0 \cdot \left(1 - \frac{v_x}{c_s}\right),$$

en réalisant un développement limité à l'ordre 1, ce qui est justifié, car $v_x \ll c_s$.

4. L'exemple le plus courant dans la vie de tous les jours d'un "bip" qui se déplace par rapport à un observateur fixe est la sirène sur un camion de pompiers ou sur une ambulance. Que se passe-t-il alors?
 - Lorsque le véhicule se rapproche de l'observateur, la vitesse v_x est négative, on obtient alors l'inégalité $v > v_0$, le son apparaît alors plus aigu.
 - Lorsque ce véhicule a dépassé l'observateur, celui-ci s'éloigne de l'observateur, $v_x > 0$ et donc $v < v_0$, le son devient plus grave.
 C'est effectivement ce qui se produit dans la vie courante.

5. Quand un avion vole à une vitesse proche de la vitesse du son, et qu'il la dépasse, ce dépassement s'accompagne d'un bruit violent, on dit que l'avion passe le mur du son. En réalité, lorsque l'avion s'approche de la vitesse du son, une onde de choc se crée à l'avant de l'avion, car toutes les surpressions acoustiques créées restent à proximité de l'avion (à cause de l'effet Doppler, toutes les ondes "s'agglutinent" devant l'avion). C'est cette onde de choc qui est communément appelée "bang" supersonique. Les ondes sonores émises en de multiples endroits par l'avion arrivent en même temps à l'observateur.

Au contraire, Un avion volant à une vitesse inférieure à celle du son ($v = 200 \text{ m.s}^{-1} < c_s = 340 \text{ m.s}^{-1}$ par exemple), ne crée pas d'onde de choc. Les ondes sonores émises en de multiples endroits par l'avion arrivent en des temps différents à l'observateur.

Remarque : on parle de "mur du son", car au début des années 50, lorsque les premiers avions de chasse purent atteindre cette vitesse du son, les pilotes perdaient le contrôle de leur engin à cause des très nombreuses vibrations dans le cockpit, ce qui rendait cette limite infranchissable.

Instruments à vent à anches

Dans cet exercice, nous allons étudier les instruments à vent qui possèdent à une extrémité de leur tuyau une anche, c'est-à-dire une lamelle libre ou battante, ou deux lamelles vibrant l'une contre l'autre, pour produire un son. Cela concerne de nombreux instruments : saxophone, clarinette, hautbois, cornemuse, binou, accordéon, etc. Ces anches peuvent être en métal, en plastique ou en roseau, et elles sont mises en vibration de différente façon : en soufflant dessus, en vidant une poche d'air remplie par le musicien, par action mécanique d'un soufflet. Le point commun de tous ces instruments est qu'ils peuvent être modélisés par un tuyau dont une ouverture est fermée et l'autre ouverte. On notera Z l'impédance acoustique de l'air dans le tuyau.

On supposera par la suite que la vitesse du fluide dans le tuyau s'exprime sous la forme d'une onde stationnaire :

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{u}_x = v_0 \cos(kx + \phi) \cdot \cos(\omega t + \phi')$$

1. Retrouver l'expression de la surpression.
2. Quelles sont les conditions aux limites associées au problème physique décrit ?
3. Trouver les modes propres de la cavité. Où sont les nœuds et ventres de la surpression et de la vitesse ?
4. Si on prend $L=50 \text{ cm}$, quelle est la fréquence du mode fondamental, sachant que la célérité des ondes sonores dans l'air vaut $c_s = 346 \text{ m.s}^{-1}$?

Nous venons de voir ici le principe de génération d'une note fondamentale et de ses harmoniques. Comment peut-on changer de note ?

5. On peut utiliser un système à piston, comme dans le cas de la trompette. Elle est construite pour produire un son fondamental de fréquence 87 Hz (c'est le Fa_1 , en réalité injouable).
 - (a) Quelle est la longueur ℓ_0 du tuyau sonore théorique correspondant.
 - (b) La trompette est munie de 3 pistons numérotés 1, 2, 3, qui baissent les notes respectivement d'un ton, d'un demi-ton et de un ton et demi. Calculer les longueurs ℓ_1 , ℓ_2 et ℓ_3 des trois rallonges qui viennent s'ajouter au tuyau ℓ_0 , sachant qu'il existe 12 demi-tons par octave.
 - (c) Combien obtient-on de notes possibles par le seul jeu des pistons ?

Solution :

1. Le lien entre la surpression et la vitesse du fluide est donnée par l'équation d'Euler linéarisée. Il nous suffit de dériver la vitesse par-rapport au temps

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\rho_0 \omega v_0 \cos(kx + \phi) \cdot \sin(\omega t + \phi'),$$

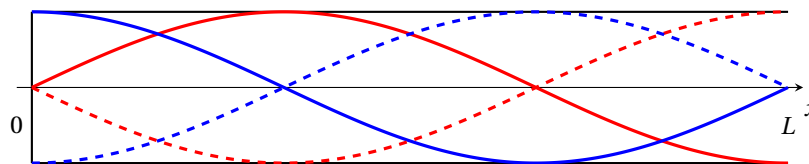
puis d'intégrer cette expression par-rapport à x (attention au signe "-" devant le gradient), et on obtient

$$p_1(x, t) = \rho_0 \frac{\omega}{c} v_0 \sin(kx + \phi) \cdot \sin(\omega t + \phi') = Z v_0 \sin(kx + \phi) \cdot \sin(\omega t + \phi').$$

2. Pour ces instruments à anches, une extrémité est fermée, la vitesse est donc nulle à cette extrémité-là, et l'autre est ouverte sur l'atmosphère, la surpression est donc nulle au niveau de cette interface.
3. On choisit l'extrémité fermée en $x = 0$ et l'extrémité ouverte en $x = L$. En $x = 0$, on a un nœud de vitesse, donc : $v_x(x = 0, t) = 0$, ce qui conduit à $\cos \phi = 0$, soit $\phi = -\pi/2$. Ensuite, en $x = L$, on a un nœud de surpression, $p_1(x = L, t) = 0$, ce qui conduit à $\cos kL = 0$, ou

$$k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow L = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}.$$

Dans cette situation, à chaque nœud de la surpression correspond un ventre de la vitesse du fluide et inversement, voir figure :



4. Pour $L=50$ cm, on trouve $\nu = c/\lambda = c/(4L) = 173$ Hz.
5. (a) Pour $\nu = 87$ Hz, on trouve $\ell_0 = 99$ cm ≈ 1 m.
- (b) Il existe 12 demi-tons par octave, diminuer la fréquence d'un demi-ton revient à diviser cette fréquence par $2^{1/12} \approx 1,06$ (on rappelle que passer d'une octave à l'autre revient à multiplier ou diviser la fréquence par 2).
- Utiliser le piston 2 revient à diminuer la note d'un demi-ton, cela revient à multiplier la longueur ℓ_0 par $2^{1/12}$, on trouve $\ell_2 = \ell_0(2^{1/12} - 1) = 6$ cm.
 - En ce qui concerne le piston 1, on multiplie ℓ_0 par $2^{1/6}$, ce qui donne comme rajout : $\ell_1 = \ell_0(2^{1/6} - 1) = 12$ cm.
 - Pour le piston 3, on baisse la note de 3 demi-tons, donc on rajoute la longueur $\ell_3 = \ell_0(2^{1/4} - 1) = 19$ cm.
- (c) Les positions des 3 pistons offrent 8 possibilités de longueur différentes, et l'ensemble des résonances ainsi obtenues donne toutes les notes de la gamme chromatique.