

Tout résultat d'un calcul devra présenter le bon nombre de chiffres significatifs. La notation tiendra largement compte du soin apporté à la rédaction. Encadrer les résultats. Les trois problèmes sont à réaliser sur des copies différentes.

La Calculatrice est INTERDITE

Problème 1 : QCM (d'après ENAC)

Les quatre parties du QCM sont indépendantes

Chaque question contient au plus deux réponses exactes.

Vous pouvez donc choisir de donner 1 ou 2 réponses à chaque question sur votre copie; une justification rapide est attendue.

1) Partie 1

- Parmi les affirmations suivantes concernant un gaz parfait, quelles sont les affirmations fausses ?
 - L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température.
 - À volume constant, la pression d'un gaz parfait dont le nombre de moles est fixé n'est inversement proportionnel qu'à sa température.
 - À volume constant, la pression d'un gaz parfait dont le nombre de moles est fixé n'est inversement proportionnel qu'au nombre de moles du gaz.
 - À température constante, le produit de la pression d'un gaz parfait, dont le nombre de moles est fixé, par le volume qu'il occupe est constant.
- Une bouteille de volume $V_1 = 100$ L contient du diazote, à la température $T_1 = 300$ K, sous la pression $p_1 = 10$ bar. Quel est le nombre n_1 de moles de diazote dans la bouteille ? On donne $R \approx 8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.
 - $n_1 = p_1 V_1 / (RT_1)$,
 - $n_1 = RT_1 / (p_1 V_1)$,
 - $n_1 \approx 400$ mol,
 - $n_1 \approx 40$ mol
- Sachant que la masse molaire du diazote est $M_m = 28 \text{ g.mol}^{-1}$, quelles est la masse volumique ρ_m du gaz dans la bouteille ?
 - $\rho_m = M_m / (n_1 V_1)$,
 - $\rho_m = n_1 M_m / V_1$,
 - $\rho_m \approx 11 \text{ g.m}^{-3}$,
 - $\rho_m \approx 11 \text{ kg.m}^{-3}$.
- On ouvre la bouteille et le diazote se détend à l'air libre, dont la pression et la température sont respectivement $p_a = 1$ bar et $T_a = 300$ K. Exprimer le volume V_2 du diazote détendu.
 - On ne peut pas le déterminer,
 - $V_2 = V_1$,
 - $V_2 = p_a V_1 / p_1$,
 - $V_2 = p_1 V_1 / p_a$
- Calculer le volume V de diazote qui s'est échappé de la bouteille.
 - $V \approx 200$ L ,
 - $V \approx 10$ L,
 - $V \approx 900$ L,
 - $V \approx 90$ L
- Dans la gamme de température considérées dans l'exercice, l'énergie interne du gaz parfait s'écrit $U = 5nRT/2$, où T est la température du gaz et n son nombre de moles. Calculer l'énergie interne U_1 du diazote comprimé dans la bouteille, puis celle U_2 du diazote détendu.
 - $U_1 \approx 24$ J ,
 - $U_1 \approx 240$ kJ,
 - $U_2 = U_1$,
 - $U_2 \approx 240$ J

2) Partie 2

Du diazote, assimilé à n moles de gaz parfait occupant un volume initial V_i , de température et pression initiales $T_i = 300$ K et $p_i = 3$ bar, subit dans cet ordre :

- Une transformation adiabatique qui amène le gaz à une température T_1 et une pression $p_1 = p_i(1+x)$; le volume du gaz est alors V_1 . En outre, la transformation est supposée réversible.
- Une transformation isobare qui amène le gaz à son état final caractérisé par la température $T_f = T_i$ et le volume V_f .

On note γ le rapport de la capacité thermique à pression constante sur la capacité thermique à volume constant du gaz. R désigne la constante des gaz parfaits.

7. Donner les expressions de V_1 et V_f en fonction de V_i , x et γ .

- $V_1 = V_i(1+x)^{1/\gamma}$,
- $V_1 = V_i(1+x)^{-1/\gamma}$,
- $V_f = \frac{V_i}{1+x}$,
- $V_f = V_i(1+x)$

8. Donner l'expression de T_1 en fonction de T_i , x et γ .

- $T_1 = T_i(1+x)^{(1-\gamma)/\gamma}$,
- $T_1 = T_i(1+x)^{(\gamma-1)/\gamma}$,
- $T_1 = T_i(1+x)^{1/\gamma}$,
- $T_1 = T_i(1+x)^{-1/\gamma}$

9. Que peut-on dire de la variation d'énergie interne ΔU du gaz entre l'état initial et l'état final ?

- $\Delta U < 0$,
- $\Delta U > 0$,
- $\Delta U = 0$,
- On ne peut rien dire

10. Que peut-on dire de la variation d'entropie ΔS du gaz entre l'état initial et l'état final? On donne l'entropie $S(T, V)$ d'un gaz parfait en fonction de sa température et de son volume :

$$S(T, V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T) + nR \ln\left(\frac{V}{n}\right) + cte,$$

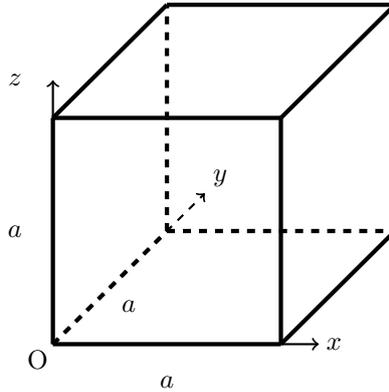
où cte est une constante.

- A) $\Delta S = 0$, B) $\Delta S = -nR \ln(1+x)$, C) $\Delta S = nR \ln(1+x)$, D) On ne peut rien dire
11. Que valent la chaleur (ou transfert thermique) Q_1 et le travail (ou transfert mécanique) W_1 reçus par le gaz à l'issue de la première transformation (adiabatique réversible)?
- A) $Q_1 = 0$, B) $Q_1 = n\frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_i)$, C) $W_1 = nRT_i\frac{1}{\gamma-1}[1 - (1+x)^{1-1/\gamma}]$, D) $W_1 = -nRT_i\frac{1}{\gamma-1}[1 - (1+x)^{1-1/\gamma}]$
12. Quelle est la variation d'énergie interne ΔU_2 lors de la seconde transformation (isobare)?
- A) $\Delta U_2 = 0$, B) $\Delta U_2 = W_1$, C) $\Delta U_2 = -W_1$, D) $\Delta U_2 = W_1/2$

3) Partie 3

Une boîte cubique d'arête a contient $n = 10^3$ moles d'argon (masse molaire $M_m = 40 \text{ g.mol}^{-1}$). Dans ce problème, on note x, y et z les coordonnées cartésiennes et \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z les vecteurs unitaires de la base cartésienne correspondante; O est l'origine du repère (voir figure ci-dessous).

Aucune connaissance exclue du programme n'est nécessaire pour résoudre ce problème. Tous les éléments indispensables sont fournis par l'énoncé.



13. Calculer le nombre N d'atomes dans la boîte et la masse m d'argon. On rappelle la valeur approximative de la constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A \approx 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- A) $N \approx 6 \times 10^{23}$ et $m \approx 6,7 \times 10^{-23} \text{ kg}$, B) $N \approx 6 \times 10^{23}$ et $m \approx 6,7 \times 10^{-26} \text{ kg}$, C) $N \approx 6 \times 10^{26}$ et $m \approx 6,7 \times 10^{-23} \text{ kg}$, D) $N \approx 6 \times 10^{26}$ et $m \approx 6,7 \times 10^{-26} \text{ kg}$
14. Un des atomes vient heurter la paroi en $x = a$, avec un vecteur vitesse $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$. La paroi étant parfaitement rigide, l'atome rebondit et repart dans la direction incidente avec le vecteur vitesse $\vec{v}' = -v_x \vec{e}_x$. Déterminer la variation $\Delta \vec{p}_a$ du vecteur quantité de mouvement de l'atome.
- A) $\Delta \vec{p}_a = \vec{0}$, B) $\Delta \vec{p}_a = mv_x \vec{e}_x$, C) $\Delta \vec{p}_a = -2mv_x \vec{e}_x$, D) $\Delta \vec{p}_a = 2mv_x \vec{e}_x$
15. On admet que l'atome possède un mouvement rectiligne et uniforme, le long de l'axe Ox , jusqu'à ce qu'il heurte de nouveau la paroi. On admet aussi que lors d'une collision, l'atome, qui arrive avec un vecteur vitesse orthogonal à une paroi, rebondit avec un vecteur vitesse opposé au vecteur vitesse incident (avant le choc), sans changer sa norme. Calculer la durée τ qui sépare deux chocs successifs sur la paroi située en $x = a$ et en déduire N_c qui désigne le nombre de chocs par seconde de cet atome avec cette paroi.
- A) $\tau = \frac{2a}{v_x}$ et $N_c = 2 \text{ s}^{-1}$, B) $\tau = \frac{2a}{v_x}$ et $N_c = \frac{v_x}{2a}$, C) $\tau = \frac{a}{v_x}$ et $N_c = \frac{v_x}{a}$, D) $\tau = \frac{a}{v_x}$ et $N_c = 1 \text{ s}^{-1}$
16. On admet que la paroi reçoit à chaque collision la quantité de mouvement $-\Delta p_a \vec{e}_x$. Quelle est la force \vec{F}_p subie par la paroi située en $x = a$ en raison des chocs répétés de l'atome?
- A) $\vec{F}_p = \frac{mv_x^2}{a} \vec{e}_x$, B) $\vec{F}_p = -\frac{mv_x^2}{a} \vec{e}_x$, C) $\vec{F}_p = \vec{0}$, D) $\vec{F}_p = \frac{mv_x^2}{2a} \vec{e}_x$
17. En réalité, comme les atomes de la boîte n'ont pas tous le même vecteur vitesse, on doit remplacer, dans l'expression précédente, v_x^2 par $v_m^2/3$ où v_m^2 est la moyenne sur tous les atomes du carré de la norme des vecteurs vitesse de chaque atome. Donner la ou les expressions correctes de la pression p exercée par le gaz d'atomes sur la paroi située en $x = a$; on note n_v le nombre d'atomes par unité de volume dans la boîte.
- A) $p = n_v mv_m/3$, B) $p = n_v mv_m^2/3$, C) $p = Nm v_m^2/(3a^3)$, D) $p = Nm v_m^2/3$

18. En admettant que le gaz dans la boîte est un gaz parfait et que la pression ci-dessus est celle qui intervient dans la loi des gaz parfaits, donner l'expression de la température T de ce gaz.

- A) $T = M_m v_m^2 / (3R)$, B) $T = R v_m^2 / (3M_m)$, C) $T = M_m v_m / (3R)$, D) $T = R v_m / (3M_m)$

4) Partie 4

Un moteur thermique à air fonctionne en cycle fermé au cours duquel n moles d'air, assimilées à un gaz parfait, subissent entre quatre états E_1, E_2, E_3 et E_4 les transformations réversibles suivantes :

$E_1 \rightarrow E_2$ une compression isentropique

$E_2 \rightarrow E_3$ une compression isochore

$E_3 \rightarrow E_4$ une détente isentropique

$E_4 \rightarrow E_1$ une détente isochore.

On désigne par p_k, V_k et T_k les pressions, volumes et températures des états E_k , où $k = 1, 2, 3$ ou 4 : On pose $V_M = V_1 = V_4$ et $V_m = V_2 = V_3$ et on introduit le facteur de compression $a = \frac{V_M}{V_m}$. On note R la constante des gaz parfaits et $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$, le rapport de la capacité thermique molaire à pression constante sur la capacité thermique molaire à volume constant. On note respectivement Q et W la chaleur (transfert thermique) et le travail (transfert mécanique) algébriquement reçu par le gaz au cours d'un cycle et Q_{ij} et W_{ij} respectivement la chaleur et le travail algébriquement reçu par le gaz lors de la transformation menant de l'état E_i à l'état E_j

19. On note Q_c la chaleur échangée avec la source chaude. Que peut-on affirmer ?

- A) $Q_c = Q_{41}$, B) $Q_c = Q_{23}$, C) $Q_c = nC_{pm}(T_3 - T_2)$, D) $Q_c = nC_{vm}(T_4 - T_1)$

20. On note Q_f la chaleur échangée avec la source froide. Que peut-on affirmer ?

- A) $Q_f = Q_{41}$, B) $Q_f = Q_{23}$, C) $Q_f = nC_{pm}(T_3 - T_2)$, D) $Q_f = nC_{vm}(T_1 - T_4)$

21. Exprimer l'efficacité η de cette machine, rapport du transfert d'énergie utile, compte tenu de sa vocation, sur le transfert d'énergie nécessaire pour la faire fonctionner :

- A) $\eta = \frac{Q_{23}}{Q_{23} + Q_{41}}$, B) $\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$, C) $\eta = 1 - \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$, D) $\eta = \frac{Q_{23}}{Q_{23} - Q_{41}}$

22. Déterminer les températures T_1 et T_3 en fonction des températures T_2 et T_4 .

- A) $T_1 = T_2 a^{1-\gamma}$, B) $T_1 = T_2$, C) $T_3 = T_4 a^{\gamma-1}$, D) $T_3 = T_4$

23. Exprimer η en fonction des températures T_k

- A) $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{\gamma(T_3 - T_2)}$, B) $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$, C) $\eta = 1 + \frac{\gamma(T_1 - T_4)}{T_3 - T_2}$, D) $\eta = \frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_4 + T_3 - T_2}$

24. L'efficacité η peut-elle s'exprimer en fonction seulement de a et γ , et si oui, quelle est sa valeur ?

- A) Oui, B) Non, C) $\eta = 1 - a^{1-\gamma}$, D) $\eta = 1 + a^{-\gamma}$

Problème 2 : Études de transformations d'un gaz parfait

On étudie différentes transformations de n moles d'un gaz parfait.

On notera P la pression du gaz, V son volume, et T sa température.

On notera R la constante des gaz parfaits.

Soit C_{Vm} la capacité thermique molaire à volume constant du gaz.

Soit C_{Pm} la capacité thermique molaire à pression constante du gaz.

Soit γ le rapport des capacités thermiques molaires à pression constante et à volume constant :

$$\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$$

1) Préliminaires

- Donner l'équation d'état du gaz parfait. Préciser, pour chacune des grandeurs utilisées dans cette équation, l'unité qui lui correspond dans le système international.
- Donner la relation qui relie les capacités calorifiques molaires C_{Pm} et C_{Vm} et la constante des gaz parfaits R . Dédurre de cette relation et de la définition du coefficient γ la relation entre C_{Vm} , R et γ d'une part, et entre C_{Pm} , R et γ d'autre part :

$$C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_{Pm} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$

- Rappeler l'expression de la variation d'énergie interne ΔU de n moles d'un gaz parfait au cours d'une transformation quelconque en fonction de la variation de température ΔT .

On rappelle l'expression de la première identité thermodynamique $dU = TdS - PdV$. Montrer que l'expression de la variation d'entropie ΔS de n moles d'un gaz parfait au cours d'une transformation quelconque en fonction de la température T et du volume V s'exprime selon :

$$\Delta S = nR \left[\frac{1}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_F}{T_I} \right) + \ln \left(\frac{V_F}{V_I} \right) \right]$$

4. En déduire que cette expression devient

$$\Delta S = nR \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_F}{T_I} \right) - \ln \left(\frac{P_F}{P_I} \right) \right]$$

si l'on utilise les variables T et P .

2) Détente isotherme

On enferme le gaz dans une enceinte diathermane (permettant les échanges thermiques) dont une paroi horizontale (piston), de masse négligeable, est mobile verticalement sans frottement. La température T_1 du milieu extérieur est constante. L'extérieur se comporte comme un thermostat (figure 1).

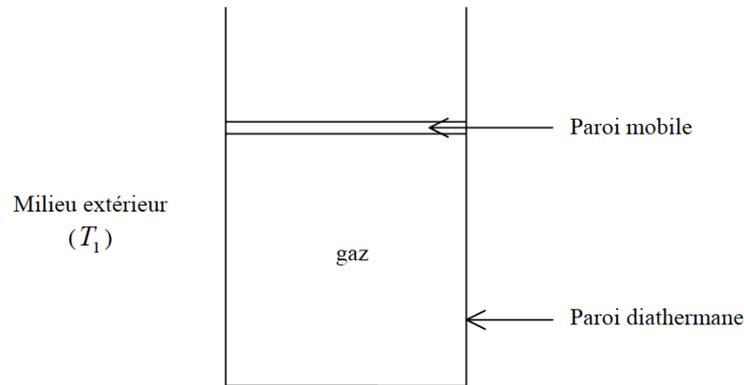


FIGURE 1 –

À l'état initial le gaz est caractérisé par une pression P_1 , un volume V_1 et une température T_1 et la paroi est bloquée.

On débloque la paroi et on la déplace de manière quasi-statique jusqu'à une position, telle que le volume V'_1 offert au gaz soit $V'_1 = 2V_1$, et on la bloque à nouveau.

1. Déterminer la pression P'_1 du gaz dans l'état final en fonction de P_1 .
2. Déterminer l'expression du travail W_1 mis en jeu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de n , R et T_1 .
3. Calculer la variation d'énergie interne ΔU_1 du gaz au cours de cette transformation. En déduire le transfert thermique Q_1 reçu par le gaz en fonction de n , R et T_1 .
4. Déduire de la question précédente l'expression de l'entropie échangée S_{e1} en fonction de n et R .
Quelle est l'expression de la variation d'entropie ΔS_1 au cours de cette transformation ?
En déduire l'entropie créée S_{c1} au cours de cette transformation. Commenter.

3) Détente de Joule Gay-Lussac

On considère un cylindre indéformable à parois athermanes (ne permettant pas les échanges thermiques) divisé intérieurement en deux compartiments de volumes identiques par une paroi de volume négligeable. Les n moles de gaz parfait se trouvent dans le compartiment 1, le compartiment 2 étant vide (figure 2).

À l'état initial le gaz est caractérisé par une pression P_2 , une température T_2 et occupe un volume V_2 . On ôte alors la séparation et le gaz parfait occupe la totalité du cylindre. L'enlèvement de la séparation se fait sans travail.

1. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, déterminer la variation d'énergie interne ΔU_2 du gaz au cours de cette transformation. En déduire la température T'_2 puis la pression P'_2 dans l'état final d'équilibre.
2. **On considère, uniquement pour cette question, le cas d'un gaz réel.** Quelle est la différence qui existe, lors d'une détente de Joule Gay-Lussac, entre le cas d'un gaz parfait et le cas d'un gaz réel ?
3. On considère à nouveau le cas du gaz parfait.
Déterminer la variation d'entropie ΔS_2 pour cette transformation.
Que vaut l'entropie échangée S_{e2} pour cette transformation ?
En déduire l'expression S_{c2} de l'entropie créée par irréversibilité au cours de cette transformation.

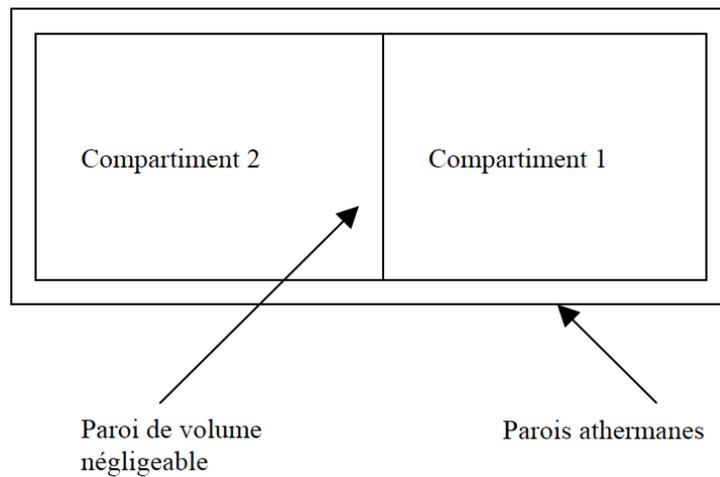


FIGURE 2 –

4. Comparer la variation d'entropie ΔS_2 au cours de cette transformation à la variation d'entropie ΔS_1 de la détente isotherme de la question précédente (question 1)). Commenter.

Problème 3 : Problème ouvert

Un verre contient initialement une masse $m_e = 250$ g d'eau à la température 25 °C. Un morceau de glace de masse $m_g = 150$ g et de température -19 °C est ensuite placé dans le verre. Enfin, on supposera que les échanges thermiques avec l'atmosphère sont négligeables.

1. Déterminer la température finale T_f et l'état final du système.
2. Calculer l'entropie créée S_c lors de la transformation.

Données :

$$\Delta h_{fusion}(0^\circ\text{C}) = 333 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}$$

$$c_{eau} = 4,18 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$$

$$c_{glace} = 2,10 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$$