

Tout résultat d'un calcul devra présenter le bon nombre de chiffres significatifs. La notation tiendra largement compte du soin apporté à la rédaction. Encadrer les résultats. Les trois problèmes sont à réaliser sur des copies différentes.

La Calculatrice est INTERDITE

Problème 1 : QCM (d'après ENAC)

Les quatre parties du QCM sont indépendantes

Chaque question contient au plus deux réponses exactes.

Vous pouvez donc choisir de donner 1 ou 2 réponses à chaque question sur votre copie ; une justification rapide est attendue.

1) Partie 1

- Parmi les affirmations suivantes concernant un gaz parfait, quelles sont les affirmations fausses ?
 - L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température.
 - À volume constant, la pression d'un gaz parfait dont le nombre de moles est fixé n'est inversement proportionnel qu'à sa température.
 - À volume constant, la pression d'un gaz parfait dont le nombre de moles est fixé n'est inversement proportionnel qu'au nombre de moles du gaz.
 - À température constante, le produit de la pression d'un gaz parfait, dont le nombre de moles est fixé, par le volume qu'il occupe est constant.
- Une bouteille de volume $V_1 = 100$ L contient du diazote, à la température $T_1 = 300$ K, sous la pression $p_1 = 10$ bar. Quel est le nombre n_1 de moles de diazote dans la bouteille ? On donne $R \approx 8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.
 - $n_1 = p_1 V_1 / (RT_1)$,
 - $n_1 = RT_1 / (p_1 V_1)$,
 - $n_1 \approx 400$ mol,
 - $n_1 \approx 40$ mol
- Sachant que la masse molaire du diazote est $M_m = 28 \text{ g.mol}^{-1}$, quelles est la masse volumique ρ_m du gaz dans la bouteille ?
 - $\rho_m = M_m / (n_1 V_1)$,
 - $\rho_m = n_1 M_m / V_1$,
 - $\rho_m \approx 11 \text{ g.m}^{-3}$,
 - $\rho_m \approx 11 \text{ kg.m}^{-3}$.
- On ouvre la bouteille et le diazote se détend à l'air libre, dont la pression et la température sont respectivement $p_a = 1$ bar et $T_a = 300$ K. Exprimer le volume V_2 du diazote détendu.
 - On ne peut pas le déterminer,
 - $V_2 = V_1$,
 - $V_2 = p_a V_1 / p_1$,
 - $V_2 = p_1 V_1 / p_a$
- Calculer le volume V de diazote qui s'est échappé de la bouteille.
 - $V \approx 200$ L ,
 - $V \approx 10$ L,
 - $V \approx 900$ L,
 - $V \approx 90$ L
- Dans la gamme de température considérées dans l'exercice, l'énergie interne du gaz parfait s'écrit $U = 5nRT/2$, où T est la température du gaz et n son nombre de moles. Calculer l'énergie interne U_1 du diazote comprimé dans la bouteille, puis celle U_2 du diazote détendu.
 - $U_1 \approx 24$ J ,
 - $U_1 \approx 240$ kJ,
 - $U_2 = U_1$,
 - $U_2 \approx 240$ J

2) Partie 2

Du diazote, assimilé à n moles de gaz parfait occupant un volume initial V_i , de température et pression initiales $T_i = 300$ K et $p_i = 3$ bar, subit dans cet ordre :

- Une transformation adiabatique qui amène le gaz à une température T_1 et une pression $p_1 = p_i(1+x)$; le volume du gaz est alors V_1 . En outre, la transformation est supposée réversible.
 - Une transformation isobare qui amène le gaz à son état final caractérisé par la température $T_f = T_i$ et le volume V_f .
- On note γ le rapport de la capacité thermique à pression constante sur la capacité thermique à volume constant du gaz. R désigne la constante des gaz parfaits.

7. Donner les expressions de V_1 et V_f en fonction de V_i , x et γ .

- $V_1 = V_i(1+x)^{1/\gamma}$,
- $V_1 = V_i(1+x)^{-1/\gamma}$,
- $V_f = \frac{V_i}{1+x}$,
- $V_f = V_i(1+x)$

8. Donner l'expression de T_1 en fonction de T_i , x et γ .

- $T_1 = T_i(1+x)^{(1-\gamma)/\gamma}$,
- $T_1 = T_i(1+x)^{(\gamma-1)/\gamma}$,
- $T_1 = T_i(1+x)^{1/\gamma}$,
- $T_1 = T_i(1+x)^{-1/\gamma}$

9. Que peut-on dire de la variation d'énergie interne ΔU du gaz entre l'état initial et l'état final ?

- $\Delta U < 0$,
- $\Delta U > 0$,
- $\Delta U = 0$,
- On ne peut rien dire

10. Que peut-on dire de la variation d'entropie ΔS du gaz entre l'état initial et l'état final? On donne l'entropie $S(T, V)$ d'un gaz parfait en fonction de sa température et de son volume :

$$S(T, V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T) + nR \ln\left(\frac{V}{n}\right) + cte,$$

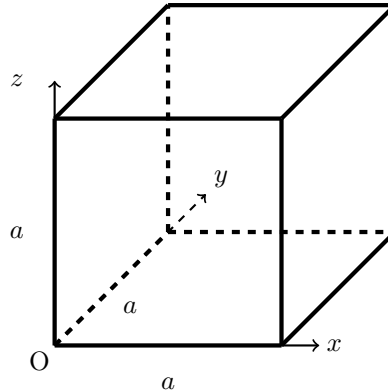
où cte est une constante.

- A) $\Delta S = 0$, B) $\Delta S = -nR \ln(1+x)$, C) $\Delta S = nR \ln(1+x)$, D) On ne peut rien dire
11. Que valent la chaleur (ou transfert thermique) Q_1 et le travail (ou transfert mécanique) W_1 reçus par le gaz à l'issue de la première transformation (adiabatique réversible)?
- A) $Q_1 = 0$, B) $Q_1 = n\frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_i)$, C) $W_1 = nRT_i\frac{1}{\gamma-1}[1 - (1+x)^{1-1/\gamma}]$, D) $W_1 = -nRT_i\frac{1}{\gamma-1}[1 - (1+x)^{1-1/\gamma}]$
12. Quelle est la variation d'énergie interne ΔU_2 lors de la seconde transformation (isobare)?
- A) $\Delta U_2 = 0$, B) $\Delta U_2 = W_1$, C) $\Delta U_2 = -W_1$, D) $\Delta U_2 = W_1/2$

3) Partie 3

Une boîte cubique d'arête a contient $n = 10^3$ moles d'argon (masse molaire $M_m = 40 \text{ g.mol}^{-1}$). Dans ce problème, on note x, y et z les coordonnées cartésiennes et \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z les vecteurs unitaires de la base cartésienne correspondante; O est l'origine du repère (voir figure ci-dessous).

Aucune connaissance exclue du programme n'est nécessaire pour résoudre ce problème. Tous les éléments indispensables sont fournis par l'énoncé.



13. Calculer le nombre N d'atomes dans la boîte et la masse m d'argon. On rappelle la valeur approximative de la constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A \approx 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- A) $N \approx 6 \times 10^{23}$ et $m \approx 6,7 \times 10^{-23} \text{ kg}$, B) $N \approx 6 \times 10^{23}$ et $m \approx 6,7 \times 10^{-26} \text{ kg}$, C) $N \approx 6 \times 10^{26}$ et $m \approx 6,7 \times 10^{-23} \text{ kg}$, D) $N \approx 6 \times 10^{26}$ et $m \approx 6,7 \times 10^{-26} \text{ kg}$
14. Un des atomes vient heurter la paroi en $x = a$, avec un vecteur vitesse $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$. La paroi étant parfaitement rigide, l'atome rebondit et repart dans la direction incidente avec le vecteur vitesse $\vec{v}' = -v_x \vec{e}_x$. Déterminer la variation $\Delta \vec{p}_a$ du vecteur quantité de mouvement de l'atome.
- A) $\Delta \vec{p}_a = \vec{0}$, B) $\Delta \vec{p}_a = mv_x \vec{e}_x$, C) $\Delta \vec{p}_a = -2mv_x \vec{e}_x$, D) $\Delta \vec{p}_a = 2mv_x \vec{e}_x$
15. On admet que l'atome possède un mouvement rectiligne et uniforme, le long de l'axe Ox , jusqu'à ce qu'il heurte de nouveau la paroi. On admet aussi que lors d'une collision, l'atome, qui arrive avec un vecteur vitesse orthogonal à une paroi, rebondit avec un vecteur vitesse opposé au vecteur vitesse incident (avant le choc), sans changer sa norme. Calculer la durée τ qui sépare deux chocs successifs sur la paroi située en $x = a$ et en déduire N_c qui désigne le nombre de chocs par seconde de cet atome avec cette paroi.
- A) $\tau = \frac{2a}{v_x}$ et $N_c = 2 \text{ s}^{-1}$, B) $\tau = \frac{2a}{v_x}$ et $N_c = \frac{v_x}{2a}$, C) $\tau = \frac{a}{v_x}$ et $N_c = \frac{v_x}{a}$, D) $\tau = \frac{a}{v_x}$ et $N_c = 1 \text{ s}^{-1}$
16. On admet que la paroi reçoit à chaque collision la quantité de mouvement $-\Delta p_a \vec{e}_x$. Quelle est la force \vec{F}_p subie par la paroi située en $x = a$ en raison des chocs répétés de l'atome?
- A) $\vec{F}_p = \frac{mv_x^2}{a} \vec{e}_x$, B) $\vec{F}_p = -\frac{mv_x^2}{a} \vec{e}_x$, C) $\vec{F}_p = \vec{0}$, D) $\vec{F}_p = \frac{mv_x^2}{2a} \vec{e}_x$
17. En réalité, comme les atomes de la boîte n'ont pas tous le même vecteur vitesse, on doit remplacer, dans l'expression précédente, v_x^2 par $v_m^2/3$ où v_m^2 est la moyenne sur tous les atomes du carré de la norme des vecteurs vitesse de chaque atome. Donner la ou les expressions correctes de la pression p exercée par le gaz d'atomes sur la paroi située en $x = a$; on note n_v le nombre d'atomes par unité de volume dans la boîte.
- A) $p = n_v mv_m/3$, B) $p = n_v mv_m^2/3$, C) $p = Nm v_m^2/(3a^3)$, D) $p = Nm v_m^2/3$

18. En admettant que le gaz dans la boîte est un gaz parfait et que la pression ci-dessus est celle qui intervient dans la loi des gaz parfaits, donner l'expression de la température T de ce gaz.

- A) $T = M_m v_m^2 / (3R)$, B) $T = R v_m^2 / (3M_m)$, C) $T = M_m v_m / (3R)$, D) $T = R v_m / (3M_m)$

4) Partie 4

Un moteur thermique à air fonctionne en cycle fermé au cours duquel n moles d'air, assimilées à un gaz parfait, subissent entre quatre états E_1, E_2, E_3 et E_4 les transformations réversibles suivantes :

$E_1 \rightarrow E_2$ une compression isentropique

$E_2 \rightarrow E_3$ une compression isochore

$E_3 \rightarrow E_4$ une détente isentropique

$E_4 \rightarrow E_1$ une détente isochore.

On désigne par p_k, V_k et T_k les pressions, volumes et températures des états E_k , où $k = 1, 2, 3$ ou 4 : On pose $V_M = V_1 = V_4$ et $V_m = V_2 = V_3$ et on introduit le facteur de compression $a = \frac{V_M}{V_m}$. On note R la constante des gaz parfaits et $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$, le rapport de la capacité thermique molaire à pression constante sur la capacité thermique molaire à volume constant. On note respectivement Q et W la chaleur (transfert thermique) et le travail (transfert mécanique) algébriquement reçu par le gaz au cours d'un cycle et Q_{ij} et W_{ij} respectivement la chaleur et le travail algébriquement reçu par le gaz lors de la transformation menant de l'état E_i à l'état E_j

19. On note Q_c la chaleur échangée avec la source chaude. Que peut-on affirmer ?

- A) $Q_c = Q_{41}$, B) $Q_c = Q_{23}$, C) $Q_c = nC_{pm}(T_3 - T_2)$, D) $Q_c = nC_{vm}(T_4 - T_1)$

20. On note Q_f la chaleur échangée avec la source froide. Que peut-on affirmer ?

- A) $Q_f = Q_{41}$, B) $Q_f = Q_{23}$, C) $Q_f = nC_{pm}(T_3 - T_2)$, D) $Q_f = nC_{vm}(T_1 - T_4)$

21. Exprimer l'efficacité η de cette machine, rapport du transfert d'énergie utile, compte tenu de sa vocation, sur le transfert d'énergie nécessaire pour la faire fonctionner :

- A) $\eta = \frac{Q_{23}}{Q_{23} + Q_{41}}$, B) $\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$, C) $\eta = 1 - \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$, D) $\eta = \frac{Q_{23}}{Q_{23} - Q_{41}}$

22. Déterminer les températures T_1 et T_3 en fonction des températures T_2 et T_4 .

- A) $T_1 = T_2 a^{1-\gamma}$, B) $T_1 = T_2$, C) $T_3 = T_4 a^{\gamma-1}$, D) $T_3 = T_4$

23. Exprimer η en fonction des températures T_k

- A) $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{\gamma(T_3 - T_2)}$, B) $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$, C) $\eta = 1 + \frac{\gamma(T_1 - T_4)}{T_3 - T_2}$, D) $\eta = \frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_4 + T_3 - T_2}$

24. L'efficacité η peut-elle s'exprimer en fonction seulement de a et γ , et si oui, quelle est sa valeur ?

- A) Oui, B) Non, C) $\eta = 1 - a^{1-\gamma}$, D) $\eta = 1 + a^{-\gamma}$

Problème 2 : Études de transformations d'un gaz parfait

On étudie différentes transformations de n moles d'un gaz parfait.

On notera P la pression du gaz, V son volume, et T sa température.

On notera R la constante des gaz parfaits.

Soit C_{Vm} la capacité thermique molaire à volume constant du gaz.

Soit C_{Pm} la capacité thermique molaire à pression constant du gaz.

Soit γ le rapport des capacités thermiques molaires à pression constante et à volume constant :

$$\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}.$$

1) Préliminaires

- Donner l'équation d'état du gaz parfait. Préciser, pour chacune des grandeurs utilisées dans cette équation, l'unité qui lui correspond dans le système international.
- Donner la relation qui relie les capacités calorifiques **molaires** C_{Pm} et C_{Vm} et la constante des gaz parfaits R . Dédurre de cette relation et de la définition du coefficient γ la relation entre C_{Vm} , R et γ d'une part, et entre C_{Pm} , R et γ d'autre part :

$$C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_{Pm} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$

- Rappeler l'expression de la variation d'énergie interne ΔU de n moles d'un gaz parfait au cours d'une transformation quelconque en fonction de la variation de température ΔT .

On rappelle l'expression de la première identité thermodynamique $dU = TdS - PdV$. Montrer que l'expression de la variation d'entropie ΔS de n moles d'un gaz parfait au cours d'une transformation quelconque en fonction de la température T et du volume V s'exprime selon :

$$\Delta S = nR \left[\frac{1}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_F}{T_I} \right) + \ln \left(\frac{V_F}{V_I} \right) \right]$$

4. En déduire que cette expression devient

$$\Delta S = nR \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_F}{T_I} \right) - \ln \left(\frac{P_F}{P_I} \right) \right]$$

si l'on utilise les variables T et P .

2) Détente isotherme

On enferme le gaz dans une enceinte diathermane (permettant les échanges thermiques) dont une paroi horizontale (piston), de masse négligeable, est mobile verticalement sans frottement. La température T_1 du milieu extérieur est constante. L'extérieur se comporte comme un thermostat (figure 1).

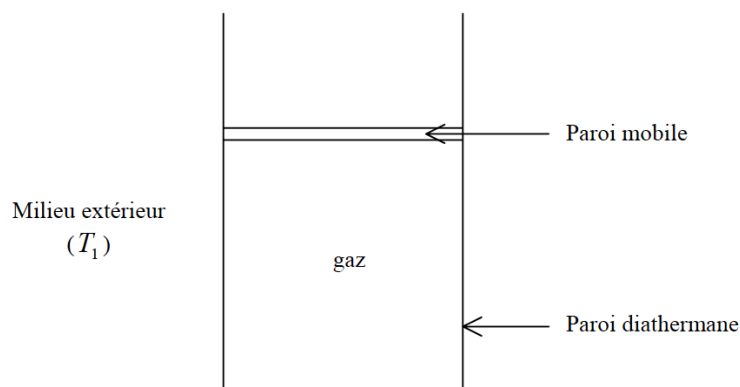


FIGURE 1 –

À l'état initial le gaz est caractérisé par une pression P_1 , un volume V_1 et une température T_1 et la paroi est bloquée.

On débloque la paroi et on la déplace de manière quasi-statique jusqu'à une position, telle que le volume V'_1 offert au gaz soit $V'_1 = 2V_1$, et on la bloque à nouveau.

- Déterminer la pression P'_1 du gaz dans l'état final en fonction de P_1 .
- Déterminer l'expression du travail W_1 mis en jeu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de n , R et T_1 .
- Calculer la variation d'énergie interne ΔU_1 du gaz au cours de cette transformation. En déduire le transfert thermique Q_1 reçu par le gaz en fonction de n , R et T_1 .
- Déduire de la question précédente l'expression de l'entropie échangée S_{e1} en fonction de n et R .
Quelle est l'expression de la variation d'entropie ΔS_1 au cours de cette transformation ?
En déduire l'entropie créée S_{c1} au cours de cette transformation. Commenter.

3) Détente de Joule Gay-Lussac

On considère un cylindre indéformable à parois athermanes (ne permettant pas les échanges thermiques) divisé intérieurement en deux compartiments de volumes identiques par une paroi de volume négligeable. Les n moles de gaz parfait se trouvent dans le compartiment 1, le compartiment 2 étant vide (figure 2).

À l'état initial le gaz est caractérisé par une pression P_2 , une température T_2 et occupe un volume V_2 . On ôte alors la séparation et le gaz parfait occupe la totalité du cylindre. L'enlèvement de la séparation se fait sans travail.

- En appliquant le premier principe de la thermodynamique, déterminer la variation d'énergie interne ΔU_2 du gaz au cours de cette transformation. En déduire la température T'_2 puis la pression P'_2 dans l'état final d'équilibre.
- On considère, uniquement pour cette question, le cas d'un gaz réel.** Quelle est la différence qui existe, lors d'une détente de Joule Gay-Lussac, entre le cas d'un gaz parfait et le cas d'un gaz réel ?
- On considère à nouveau le cas du gaz parfait.
Déterminer la variation d'entropie ΔS_2 pour cette transformation.
Que vaut l'entropie échangée S_{e2} pour cette transformation ?
En déduire l'expression S_{c2} de l'entropie créée par irréversibilité au cours de cette transformation.

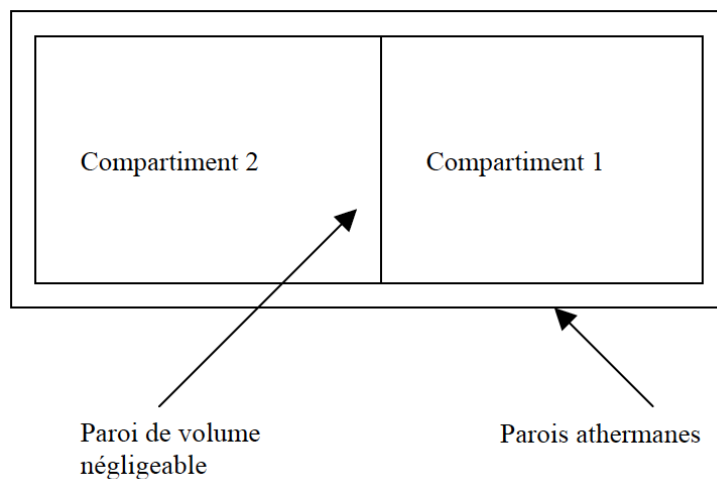


FIGURE 2 –

4. Comparer la variation d'entropie ΔS_2 au cours de cette transformation à la variation d'entropie ΔS_1 de la détente isotherme de la question précédente (question 1)). Commenter.

Problème 3 : Problème ouvert

Un verre contient initialement une masse $m_e = 250$ g d'eau à la température 25 °C. Un morceau de glace de masse $m_g = 150$ g et de température -19 °C est ensuite placé dans le verre. Enfin, on supposera que les échanges thermiques avec l'atmosphère sont négligeables.

1. Déterminer la température finale T_f et l'état final du système.
2. Calculer l'entropie créée S_c lors de la transformation.

Données :

$$\Delta h_{fusion}(0^\circ\text{C}) = 333 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}$$

$$c_{eau} = 4,18 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$$

$$c_{glace} = 2,10 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$$