

Dans ce chapitre, nous abordons la notion de superpositions d'ondes lumineuses, dont la description (par le modèle scalaire) a été établi au chapitre précédent. Nous débuterons par une analyse qualitative de cette superposition, puis nous établirons la *formule de Fresnel* dans le cas de deux ondes cohérentes entre elles.

Table des matières

I - Superposition de deux ondes lumineuses quelconques	1
1)Présentation de la situation	1
2)Détermination de l'éclairement	1
3)Critère de cohérence temporelle	2
4)Notion de cohérence spatiale	2
5)Condition sur l'interféromètre	3
II-Superposition de deux ondes lumineuses monochromatiques cohérentes	3
1)Formule de Fresnel	3
2)Franges d'égal éclairement ; contraste	4
3)Biprisme de Fresnel	5
III Superposition de N ondes lumineuses monochromatiques cohérentes	5
1)Exemple du réseau	5
2)Interférences constructives et demi-largeur des franges brillantes	6
a)Condition d'interférences constructives	7
b)Demi-largeur des franges brillantes	7
c)Condition d'interférences constructives	7

I - Superposition de deux ondes lumineuses quelconques

1) Présentation de la situation

Deux vibrations lumineuses, issues de S, parcourent des chemins différents, puis se recombinent (se superposent) en M. Les deux vibrations s'écrivent (voir chapitre 1) :

$$a_1(M, t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1(M))$$

et

$$a_2(M, t) = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2(M))$$

(on simplifie la notation de l'amplitude $a_1(M)$ en A_1 et $a_2(M)$ en A_2)

$$\text{avec } \varphi_i(M) = \varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0} \mathcal{L}(SM)_i$$

Que se passe-t-il lorsqu'on fait la somme de 2 signaux sinusoïdaux de même fréquence (mais éventuellement déphasés) ?

On regarde le code python nommé "interferences.py".

Observations :

Conclusion : l'amplitude du signal résultant $a(M, t)$ est maximale lorsque les signaux $a_1(M, t)$ et $a_2(M, t)$ sont en phase, et minimale lorsque ces signaux sont en opposition de phase.

De plus, en général l'amplitude résultante est différente de $A_1 + A_2$.

2) Détermination de l'éclairement

On cherche à déterminer ici l'éclairement en un point M, de deux vibrations lumineuses issues de deux sources et parcourant des chemins optiques différents (associés à des déphasages respectifs $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$) ; on considère que $a_1(M, t)$ oscille à la pulsation ω_1 et $a_2(M, t)$ oscille à la pulsation ω_2 .

En M, on aura la vibration :

$$a(M, t) = A \cos(\omega t - \varphi(M)) = a_1(M, t) + a_2(M, t)$$

On cherche à déterminer l'éclairement $\mathcal{E} = 2\langle a^2(M, t) \rangle = A^2$ en fonction de $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$.

— RAPPEL DE SUP —

Valeur moyenne temporelle : notée $\langle . \rangle$, elle est définie pour un signal périodique $y(t)$ de période T par

$$\langle y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

Si le signal $y(t)$ est sinusoïdal ($y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi)$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$), je rappelle les résultats :

$$\langle y(t) \rangle = 0$$

$$Y_{eff} = \sqrt{\langle y^2(t) \rangle} = \frac{Y_m}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} a(M, t)^2 &= a_1(M, t)^2 + a_2(M, t)^2 + 2a_1(M, t)a_2(M, t) \\ &= A_1^2 \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))^2 + A_2^2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))^2 + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \\ &= A_1^2 \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))^2 + A_2^2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))^2 + \\ &\quad A_1 A_2 [\cos(\omega_2 t - \varphi_2(M) + \omega_1 t - \varphi_1(M)) + \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M) - (\omega_1 t - \varphi_1(M)))] \\ &= A_1^2 \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))^2 + A_2^2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))^2 + \\ &\quad A_1 A_2 [\cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) + \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_1(M) - \varphi_2(M))] \end{aligned}$$

On en déduit l'éclairement en M en prenant la valeur moyenne de l'expression précédente :

$$\mathcal{E}(M) = 2 \left(\frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + A_1 A_2 \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) + \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle \right)$$

C'est ce troisième terme qui peut expliquer l'évolution de l'éclairement en fonction du point M, c'est le **terme d'interférences**. Nous allons étudier les situations où ce terme est non nul.

3) Critère de cohérence temporelle

On a vu plus haut que la valeur moyenne d'un cosinus qui oscille au cours du temps est nulle. Le terme en $(\omega_1 + \omega_2) * t$ n'est jamais nul, on aura alors :

$$\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle = 0$$

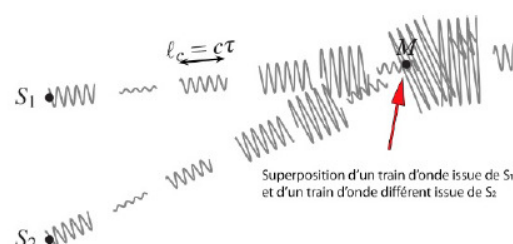
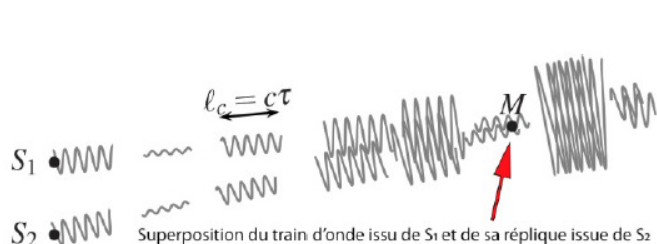
Pour le terme $\langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle$: si $\omega_1 \neq \omega_2$, le cosinus dépend du temps, et la valeur moyenne est alors nulle.

En revanche, si $\omega_1 = \omega_2$, le cosinus est alors constant, et donc égal à sa valeur moyenne.

Définition :

Critère de cohérence temporelle (1) : pour que deux ondes interfèrent, il faut que les sources qui les créent soient de même pulsation ou ce qui est équivalent, de même fréquence.

4) Notion de cohérence spatiale



La condition de cohérence temporelle $\omega_1 = \omega_2$ étant vérifiée, le terme d'interférences s'écrit :

$$A_1 A_2 \langle \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle$$

La condition de cohérence temporelle n'est donc pas suffisante. Pour que les interférences existent, il faut aussi que $\langle \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle \neq 0$.

$$\varphi_1(M) - \varphi_2(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \mathcal{L}(S_1 M) + \varphi(S_1) - \frac{2\pi}{\lambda_0} \mathcal{L}(S_2 M) - \varphi(S_2) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta + \Delta\varphi_S$$

Pour que la valeur moyenne du cosinus ne soit pas nulle, il faut notamment que $\Delta\varphi_S$ ne soit pas une fonction aléatoire du temps.

Pour observer des interférences il faut donc que $\Delta\varphi_S$ à l'émission ne soit pas aléatoire, donc que les phases à l'émission soient synchronisées. Cependant on ne sait pas réaliser cette synchronisation pour des phénomènes vibratoires si rapides. **Pour que $\Delta\varphi_S$ ne soit pas aléatoire, on choisit de faire se superposer deux trains d'onde identiques, c'est-à-dire issus d'un même train d'onde, donc d'un même point source.** Ceci étant, $\Delta\varphi_S = 0$ quelle que soit la date t .

Les deux sources sont dites synchrones.

Définition : Cohérence spatiale des ondes : pour que deux ondes lumineuses interfèrent, elles doivent provenir d'un même point source.

Deux ondes cohérentes temporellement et spatialement sont dites **cohérentes**.

5) Condition sur l'interféromètre

L'interféromètre ne doit pas imposer une différence de chemins optiques supérieure à la longueur de cohérence de la lumière qu'il reçoit pour que l'on puisse observer des interférences. La condition d'interférence concernant l'interféromètre est :

$$\delta \ll \ell_c$$

Si ces conditions de cohérence ne sont pas remplies (sources totalement incohérentes), les valeurs moyennes des cosinus sont toutes nulles, et on obtient alors :

$$\mathcal{E} = A_1^2 + A_2^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

où A_1^2 correspond à l'éclairement de la source 1 et A_2^2 à l'éclairement de la source 2. **L'éclairement total est égal à la somme des éclairagements des deux sources incohérentes.**

II - Superposition de deux ondes lumineuses monochromatiques cohérentes

Conclusion

Le phénomène d'interférences nécessite :

- la superposition de deux ondes cohérentes (temporellement et spatialement), donc deux ondes provenant d'un même point source émettant une lumière monochromatique ;
- un interféromètre qui véhicule ces deux ondes et crée entre elles une différence de marche $\delta(M)$ inférieure (en valeur absolue) à la longueur de cohérence des ondes. Lorsque ces trois conditions sont réunies, on dit que les ondes sont **totalement cohérentes**.

1) Formule de Fresnel

Dans ces conditions, l'éclairement en M vaut :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)$$

avec $\delta(M) = \mathcal{L}(SM)_1 - \mathcal{L}(SM)_2$ est appelée **différence de marche** (géométrique).

Interférences constructives :

Les interférences sont dites constructives lorsque l'éclairement est maximal.

La condition d'interférences constructives s'exprime sous la forme ($m \in \mathbb{Z}$) :

$$\Delta\varphi(M) = \varphi_1(M) - \varphi_2(M) = 2m\pi$$

en terme de déphasage,

$$\delta(M) = m\lambda_0 = \frac{2m\pi}{k}$$

en terme de différence de marche ou

$$\Delta t(M) = mT = \frac{2m\pi}{\omega}$$

en terme de retard temporel.

Interférences destructives :

Les interférences sont dites destructives lorsque l'éclairement est minimal.

La condition d'interférences destructives s'exprime sous la forme ($m \in \mathbb{Z}$) :

$$\Delta\varphi(M) = (2m + 1)\pi$$

en terme de déphasage,

$$\delta(M) = (m + \frac{1}{2})\lambda_0 = \frac{(2m + 1)\pi}{k}$$

en terme de différence de marche ou

$$\Delta t(M) = (m + \frac{1}{2})T = \frac{(2m + 1)\pi}{\omega}$$

en terme de retard temporel.

Définition : Ordre d'interférences.

En un point M du champ d'interférences, l'ordre d'interférences p est :

$$p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi}$$

Propriété :

Un éclairement maximal correspond à un ordre d'interférence qui est un **entier relatif** : $p(M) = m$ avec $m \in \mathbb{Z}$

Cas particulier : Cas particulier : si $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0$, alors $\mathcal{E}_{max} = 4\mathcal{E}_0$. L'éclairement en ces points est alors le double de celle obtenue s'il n'y avait pas d'interférences.

2) Franges d'égal éclairement ; contraste

En considérant l'expression $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}\cos(\Delta\varphi(M))$ si le module A_1 ou A_2 de l'amplitude complexe des champs varie lentement avec la position de M dans l'espace, ce qui est généralement le cas, alors les surfaces d'éclairement constant sont définies par

Définition : Franges d'égal éclairement

Elles sont définies par

$$\Delta\varphi(M) = cte1 \quad \text{ou encore} \quad p(M) = cte2$$

Le phénomène d'interférences est donc marqué par la présence de zones claires dues aux interférences constructives, et de zones sombres, dues aux interférences destructives. Cependant, le contraste de ces zones peut être fort variable en fonction de l'amplitude des champs qui se superposent au point M considéré (le minimum d'intensité est nul si les amplitudes des deux ondes sont égales).

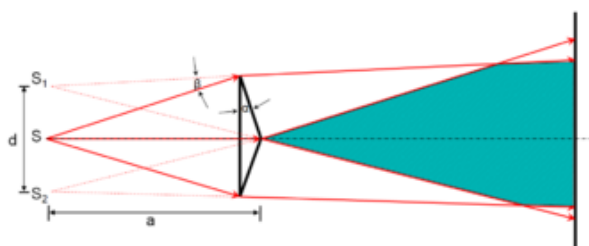
Michelson a donné une définition objective de ce contraste C du phénomène d'interférences, que l'on appelle aussi visibilité V :

Définition : Contraste

$$C = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}}$$

Remarque :

Le cas d'observation des interférences avec le meilleur contraste est donc celui où les intensités, dues à chaque source prise isolément, sont égales ou voisines.

3) Biprisme de Fresnel

Le biprisme de Fresnel est une expérience menée par Augustin Fresnel pour générer deux sources cohérentes entre elles. Le biprisme est composé de deux prismes de géométrie et d'indice de réfraction identique. Leur angle au sommet est très faible et les deux prismes sont juxtaposés par leur petite base formant ainsi un unique prisme dont la base triangulaire est un triangle isocèle dont l'angle au sommet est très obtus. Voir TD 3

III - Superposition de N ondes lumineuses monochromatiques cohérentes

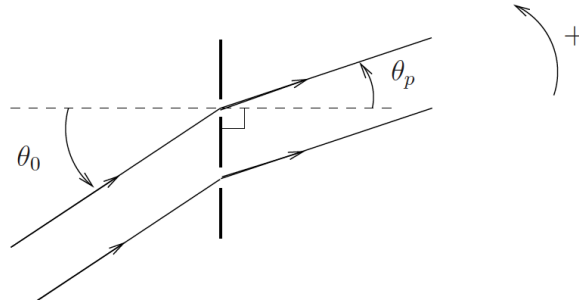
Une interférence à N ondes résulte de la superposition de ces ondes en un même point d'observation. De manière intuitive, on peut penser à utiliser un dispositif similaire aux fentes d'Young, constitué de N fentes ; ce type de dispositif est appelé *réseau* et fait l'objet des parties suivantes.

1) Exemple du réseau

Un réseau est un dispositif constitué de N fentes T_n , régulièrement espacées d'une distance a appelée *pas du réseau*. On considère des rayons incidents parallèles entre eux qui forment un angle θ_0 avec la normale au réseau. Les rayons lumineux émergents (angle θ_p avec la normale), parallèles entre eux, se coupent loin du réseau, où ils peuvent interférer.

Considérons deux fentes successives T_n et T_{n+1} , et observons les surfaces d'onde, pour déterminer la différence de marche des deux rayons. Celle-ci s'écrit :

$$\delta_{n,n+1} = \mathcal{L}(SM)_{n+1} - \mathcal{L}(SM)_n$$



Si on trace la surface d'onde vers S passant par T_n et celle du côté de M passant par T_{n+1} (principe de retour inverse de la lumière), on obtient :

$$\delta_{n,n+1} = JT_{n+1} - IT_n = a \sin(\theta_p) - a \sin(\theta_0)$$

Un réseau étant une structure périodique, la différence de marche entre les ondes passant par deux fentes successives est indépendante des fentes considérées, $\delta_{n,n+1} = \delta$. Le déphasage est alors :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} [a \sin(\theta_p) - a \sin(\theta_0)]$$

On impose l'origine des phases à la fente T_0 ; la phase de l'onde passant par la fente T_n est alors $\varphi_n = n\varphi$. On observe alors que les déphasages sont en **progression arithmétique**

2) Interférences constructives et demi-largeur des franges brillantes

On commence par écrire l'amplitude complexe de l'onde qui possède une phase à l'origine φ_n par-rapport à l'onde qui n'en possède pas (on se place à $t = 0$) :

$$\underline{a}_n(M) = A_0 e^{-jn\varphi}$$

La superposition des amplitudes en M (interférences) s'écrit :

$$\underline{a}(M) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n(M) = A_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\varphi}$$

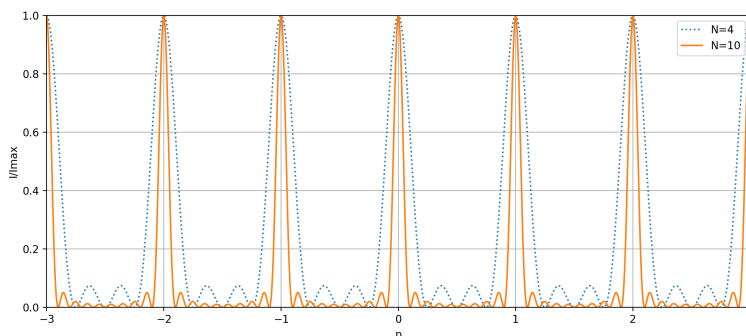
La somme est une somme géométrique de raison $e^{-j\varphi}$ contenant N termes. On a :

$$\underline{a}(M) = A_0 \frac{1 - e^{-jN\varphi}}{1 - e^{-j\varphi}}$$

On en déduit alors l'expression de l'éclairement en M, en prenant le module au carré :

$$\mathcal{E}(M) = A_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

On utilise python (Intensite_Nondes.py) pour tracer cet éclairement pour différentes valeurs de N



On peut identifier ici les caractéristiques importantes d'une interférences à N ondes (éclairage calculé en fonction de $\varphi = 2\pi p$ et tracé en fonction de p) :

- l'intensité d'une frange brillante est d'autant plus grande que N est grand, et l'éclairage est proportionnel à N^2 (non visible ici).
- on observe une interférence constructive et donc une frange brillante pour $\varphi = 2\pi p$ avec p entier.
- la largeur en déphasage φ des franges brillantes est d'autant plus petite que N est grand et cette largeur est proportionnelle à $\frac{1}{N}$.

Afin de valider ces points, on peut étudier plus précisément l'éclairage.

a) Condition d'interférences constructives

L'éclairage est maximal lorsque son dénominateur $|\sin(\frac{\varphi}{2})|$ est minimal, c'est-à-dire égal à 0. Il y a donc bien interférence constructive lorsque $\varphi = 2\pi p$ avec p entier. Les ondes sont alors en phase deux à deux, ce qui revient à dire que toutes les ondes qui interfèrent en M sont en phase.

En effectuant un développement limité de l'éclairage au voisinage de $\varphi = 2\pi p$ (p entier), on trouve :

$$\mathcal{E}(M) = A_0^2 \frac{\left(\frac{N}{2}\varphi\right)^2}{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2} = N^2 A_0^2$$

b) Demi-largeur des franges brillantes

Cette demi-largeur correspond à l'écart en phase φ entre la position d'une frange brillante et la première annulation d'intensité qui s'en suit. On considère la frange qui correspond à $\varphi = 0$. L'annulation d'intensité qui suit cette valeur correspond à l'annulation du numérateur de l'éclairage, c'est-à-dire $\frac{N}{2}\varphi_{d,l} = \pi$, ou encore

$$\varphi_{d,l} = \frac{2\pi}{N}$$

c) Condition d'interférences constructives

D'après tout ce qui a été dit, on écrit directement la **formule des réseaux** :

$$\delta = m\lambda_0 = a(\sin(\theta_p) - \sin(\theta_0))$$

A RETENIR

Pour des interférences à N ondes :

- la *condition d'interférences constructives* est atteinte lorsque la phase de l'onde est un multiple de 2π
- le *maximum* d'éclairage est alors égal à $N^2 A_0^2$
- la *demi-largeur* d'une frange claire est $\frac{2\pi}{N}$
- la *formule des réseaux* s'écrit :

$$\sin(\theta_p) - \sin(\theta_0) = m \frac{\lambda_0}{a}$$