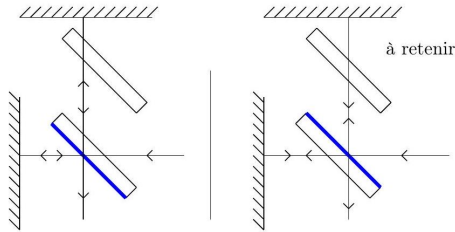


Problème 1 - Mesures interférométriques de longueurs d'ondes (d'après CCMP)

- Il s'agit d'équilibrer les chemins optiques sur les deux voies et donc le nombre de passages dans le verre pour chacun des faisceaux.



La face semi-réfléchissante a été représentée en traits plus épais. Sur le schéma de gauche l'un des faisceaux traverse trois fois le verre contre une fois pour l'autre faisceau. Sur le schéma de droite, il y a équilibre des deux parcours dans les lames. (Remarque : par souci de visibilité on n'a pas représenté les réfractions à la traversée des lames).

- Dans une configuration "lame d'air", les franges sont localisées à l'infini et on observe des anneaux.

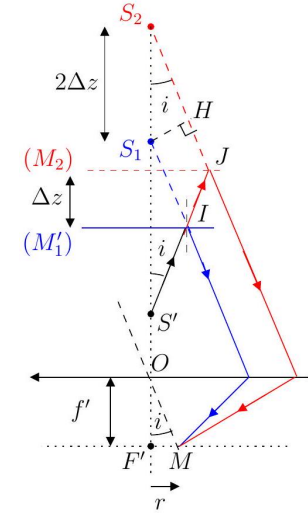
Si l'oculaire est déréglé, ce qui revient à une observation à distance finie, on observe une perte de contraste d'autant plus importante que le réglage est dégradé.

- Au centre de la figure d'interférences, la différence de marche vaut $\delta = 2\Delta z$ (le facteur 2 est dû à l'aller-retour). Avec N franges qui défilent, il vient : $2\Delta z = N\lambda_0$.

- Pour le calcul de la différence de marche, on fait intervenir, la source fictive S' (image de la source réelle par la séparatrice) et les sources secondaires S_1 et S_2 images de la source fictive S' par les miroirs (M_1) et (M_2).

Avec $S'I = S_1I$, il vient $(S'M)_1 = (S_1M)$ et de même $(S'M)_2 = (S_2M)$ comme si la lumière était issue des sources secondaires S_1 et S_2 , c'est-à-dire pour la différence de marche : $\delta(M) = (S'M)_2 - (S'M)_1 = (S_2M) - (S_1M) = S_2H + (HM) - (S_1M)$ avec H le projeté orthogonal de S_1 sur le segment S_2J .

Les rayons qui convergent en M , point du plan focal image, sont nécessairement issus de rayons parallèles. En considérant le retour inverse de la lumière, le théorème de Malus assure que $(MS_1) = (MH)$, et finalement : $\delta(M) = S_2H = 2\Delta z \cos(i)$



Au centre de la figure d'interférences, $\delta_0 = 2\Delta z_{\max}$. Pour un angle $\Delta\theta$, la différence de marche est $\delta = 2\Delta z_{\max} \cos(\Delta\theta)$. Le retour a une frange de même nature impose :

$$\delta_0 - \delta = \lambda_0 \Rightarrow 2\Delta z_{\max} \cos(\Delta\theta) = 2\Delta z_{\max} - \lambda_0$$

- $\lambda_0 = \frac{2 \times 1035}{3156} = \frac{2070}{3156} \Rightarrow \lambda_0 \approx 0,65 \mu\text{m}$ donc la raie rouge H_α .

$$\text{Avec } \lambda_0 = \frac{2\Delta z}{N} \Rightarrow \frac{\delta\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\delta(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{2}{1035} \Rightarrow \frac{\delta\lambda_0}{\lambda_0} \approx 2 \times 10^{-3}$$

Après le défilement de 1000 franges, l'expérience montre que les anneaux sont très rapprochés, l'angle $\Delta\theta$ est nécessairement faible, il vient :

$$2\Delta z_{\max} \left(1 - \frac{(\Delta\theta)^2}{2}\right) = 2\Delta z_{\max} - \lambda_0 \Rightarrow (\Delta\theta)^2 = \frac{\lambda_0}{\Delta z_{\max}} = \frac{2}{N}$$

$$\text{A.N. : } \Delta\theta = \sqrt{\frac{2}{3156}} \approx \sqrt{\frac{1}{1600}} \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{1}{40} \text{ rad} = 0,025 \text{ rad.}$$

L'angle est de l'ordre de 1° ce qui reste très observable.

- Pour deux sources cohérentes de même intensité, l'intensité résultante est donnée par la formule de Fresnel :

$$I(\delta) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right)$$

Avec $I_{\max}$ et $I_{\min}$ les intensités maximale et minimale, le contraste C est défini par :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ici}} \quad C = \frac{4I_0 - 0}{4I_0 + 0} = 1$$

7. Des sources de fréquence différente sont incohérentes, l'intensité résultante est la somme des intensités dues à chacune des sources individuelles :

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right) + 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right)$$

Avec un peu de trigonométrie et compte tenu des définitions de λ_0 et $\Delta\lambda$:

$$I = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \cos \left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) \right)$$

Compte tenu de $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, la période de variation du second cosinus est beaucoup plus grande que celle du premier, on peut donc supposer que ce second terme est quasiment constant sur une variation de la différence de marche de l'ordre de la longueur d'onde, en conséquence :

$$I_{\max} = 4I_0 \left(1 + \left| \cos \left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) \right| \right) \quad \text{et} \quad I_{\min} = 4I_0 \left(1 - \left| \cos \left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) \right| \right)$$

Et pour le contraste : $C = \left| \cos \left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) \right|$

On note que le contraste s'annule pour $\frac{\pi\delta_k\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. L'observation d'une succession d'annulations de contraste permet donc grâce à cette dernière relation de remonter à $\Delta\lambda$ connaissant λ_0 .

8. Le contraste des franges sera minimal pour une différence de marche qui conduit à une interférence constructive pour une des longueurs d'onde et une interférence destructive pour l'autre longueur d'onde ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\lambda_1} = p \text{ et } \frac{\delta}{\lambda_2} = p + m + \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad \{p, m\} \in \mathbb{Z}^2 \\ \Rightarrow \quad \delta \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \delta \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) = m + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \left(m + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

La relation obtenue est tout à fait identique à la relation obtenue par une autre méthode à la question précédente.

Pour une telle valeur de δ , l'intensité lumineuse passe de $I_{\max} = 4I_1$ (interférences

constructives pour la raie λ_1 et destructives pour λ_2) à $I_{\max} = 4I_2$ (interférences constructives pour la raie λ_2 et destructives pour λ_1) et donc pour le contraste :

$$C = \frac{4I_1 - 4I_2}{4I_1 + 4I_2} \Rightarrow C = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$$

On note que le contraste ne s'annule plus pour $I_1 \neq I_2$.

$$\text{A.N. : } \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = \frac{(6,5 \times 10^{-7})^2}{1,4 \times 10^{-11}} \approx \frac{40 \times 10^{-14}}{1,4 \times 10^{-11}} \Rightarrow \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \approx 3 \text{ cm}$$

Il faudrait faire varier la différence de marche de plusieurs centimètres pour observer au moins deux annulations de contraste. La longueur de cohérence des lampes spectrales est plutôt de l'ordre du millimètre. L'observation n'est pas possible. Par ailleurs, une telle différence de marche nécessiterait un déplacement comparable du miroir mobile (à un facteur 2 près toutefois). Les interféromètres de Michelson des lycées permettent rarement un déplacement de plus de deux centimètres de part et d'autre du contact optique.

Problème 3 : TERRE !

1) Étude du mouvement d'un satellite

- Réf. géocentrique : $\begin{cases} \text{centre au centre de masse de la Terre} \\ \text{axes dirigés vers 3 étoiles fixes (celles du référentiel de Copernic)} \end{cases}$

Un référentiel est dit "galiléen" si le mouvement d'un point matériel isolé ou pseudo-isolé, repéré dans ce référentiel, est une translation rectiligne et uniforme (ou alors si le référentiel est lui-même en translation rectiligne uniforme dans un autre référentiel galiléen).

- Pour un corps à répartition de masse sphérique, le champ gravitationnel est colinéaire au vecteur radial des sphériques, il pointe vers le centre de ce corps. On écrit :

$$\vec{g}(M) = -g \frac{M_T}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{F}_g = m \vec{g}(M)$$

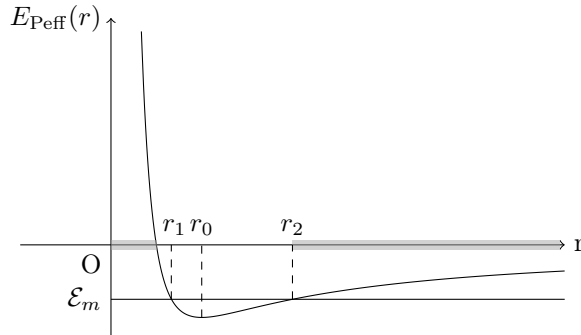
- TMC appliqué au mobile (m) dans R_T : $\frac{d\vec{L}_0(M)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_g)$ seule force subie per M
Or, $\vec{M}_O(\vec{F}_g) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_g = \vec{0}$ car $\vec{OM}$ et $\vec{F}_g$ colinéaires
 $\rightarrow \vec{L}_0(M) = \vec{cste} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \forall t, (\vec{OM}, \vec{v}) \in \text{plan} \perp \vec{L}_0$ (plan qui reste toujours le même)
 $\Rightarrow$ le mouvement de M reste contenu dans ce plan.

4. On cherche $\mathcal{E}_p$ t.q. $\vec{F}_g = -\text{grad}(\mathcal{E}_p) \Leftrightarrow -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{e}_r \Leftrightarrow \mathcal{E}_p(r) = -\frac{GmM_T}{r} (+ \text{cste})$
 cste prise nulle parce que $\mathcal{E}_p \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$

5. La seule force ($\vec{F}_g$) subie par M étant conservative, d'après le TEM, on a $\mathcal{E}_M = \text{cste}$
 $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{GmM_T}{r}$
 Or $\vec{\mathcal{L}}_0(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = \text{cste} \Rightarrow r^2\dot{\theta} = \text{cste} = \frac{L_0}{m}$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mr^2 + \underbrace{\frac{\mathcal{L}_0^2}{2mr^2} - \frac{GM_T}{r}}_{\mathcal{E}_{p, \text{eff}}(r)}$$

6. $\mathcal{E}_m = \text{cste} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p, \text{eff}}$ où $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0 \Rightarrow \mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p, \text{eff}}$ forcément.
 7. Pour un état lié, $\mathcal{E}_m < 0$. Le mouvement est contraint par $r \in [r_1, r_2]$



8. Mouvement elliptique : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p, \text{eff}}$ aux positions extrêmes (en $r = r_1$ et $r = r_2$, que sont le périégée et l'apogée) de la trajectoire.

Lorsque $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p, \text{eff}}(r_0)$, on a un mouvement circulaire car $r = r_0, \forall t$.

9. D'après le PFD sur cette trajectoire, on obtient $v_{\text{alt}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$ soit $\mathcal{E}_{m, \text{alt}} = -\frac{GmM_T}{2R}$

10. $T = \frac{2\pi R}{v}$ soit $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

11. Sur la trajectoire elliptique : $\mathcal{E}_{m, \text{tr}} = -\frac{GmM_T}{2a}$ où $2a = R + R_c$

12. $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m, \text{tr}} - \mathcal{E}_{m, \text{alt}} = -GmM_T \left[\frac{1}{R+R_c} - \frac{1}{2R} \right] = -GmM_T \frac{R-R_c}{2R(R+R_c)} < 0$, il faut donc

diminuer l'énergie mécanique, donc freiner le satellite, car les énergies potentielles sont identiques en A.

13. De même en P : $\Delta\mathcal{E}'_m = \mathcal{E}_{m, \text{cim}} - \mathcal{E}_{m, \text{tr}} = -GmM_T \left[\frac{1}{2R_c} - \frac{1}{R+R_c} \right] = -GmM_T \frac{R-R_c}{2R_c(R+R_c)} < 0$; par le même raisonnement (énergies potentielles identiques en P), il faudra freiner le satellite pour qu'il puisse accrocher sa trajectoire cimetièr.

2) Gravitation et pesanteur

1.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}$$

où $\vec{u} = \frac{\vec{M_1 M_2}}{r}$

2.

$$\vec{G}(r > R_T) = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r$$

$$G_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} = 1.10^1 \text{ m.s}^{-2}$$

3. Le référentiel terrestre n'est pas galiléen car il n'est pas en translation rectiligne uniforme dans le référentiel géocentrique. Il faut alors rajouter la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ie} = m\omega_T^2 \vec{HM}; \vec{F}_{ic} = -2m\omega_T \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ (}\vec{u} \text{ unitaire colinéaire à } \vec{SN}\text{)}.$$

4. Le poids d'un corps est la force, colinéaire au pendule en équilibre, est opposée à la tension du fil. Ici, le PFD à l'équilibre donne :

$$\vec{0} = m\vec{G} + m\omega_T^2 \vec{HM} + \vec{T}$$

soit le poids dans le référentiel terrestre non galiléen $\vec{P} = \vec{g}$ avec

$$\vec{g}(M) = -\frac{GM_T}{\|\vec{TM}\|^3} \vec{TM} + \omega_T^2 \vec{HM}$$

5. $\|\vec{g}(E)\| = |\omega_T^2 R_T - G \frac{M_T}{R_T^2}|$; $\|\vec{g}(N)\| = G \frac{M_T}{R_T^2}$, soit $\Delta g = 0,03$.

3) Aplatissement de la Terre

6. On projette la RFSF sur Oz ascendant : $P'(z) = -\rho g$ et on intègre : $P(z) = P_0 - \rho g z$; $P(H = -z) = P_0 + \rho g H \approx 1.10^8 \text{ Pa}$, il faut multiplier P_0 par 1000 (on augmente P de P_0 tous les 10 m...)

7. Si on considère le fluide compressible, la masse volumique sera plus grande à une profondeur plus importante, donc P évoluera plus rapidement avec la profondeur, la pression sera plus importante dans ce cas.

8.

$$\mathcal{E} = \frac{\omega_T^2 R_T}{\frac{GM_T}{R_T^2}} = \frac{F_{ie}}{F_g}$$

$\mathcal{E}$ propose le rapport entre la force d'inertie d'entraînement et la force gravitationnelle, sa valeur nous indiquera quelle force l'emporte sur l'autre ; ce nombre nous renseignera aussi sur les zones où la force d'inertie a une influence : $\mathcal{E} = 3.10^{-3}$

9. $\vec{HM} \cdot \vec{u}_z = 0$, soit $\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{4}{3}pi\mathcal{G}\rho_T^2 \vec{TM} \cdot \vec{u}_z = -\frac{4}{3}pi\mathcal{G}\rho_T^2 z$, soit $K_2 = \frac{4}{3}pi\mathcal{G}\rho_T^2$

De la même façon, $-\frac{4}{3}pi\mathcal{G}\rho_T^2 \vec{TM} \cdot \vec{u}_x = -\frac{4}{3}pi\mathcal{G}\rho_T^2 x$ et $\rho_T \omega_T^2 \vec{HM} \cdot \vec{u}_x = \rho_T \omega_T^2 x$ (même chose sur y), soit $K_1 = \frac{4}{3}pi\mathcal{G}\rho_T^2 - \rho_T \omega_T^2$

10. L'équation 1 donne en intégrant : $P(x, y, z) = -K_1 \frac{x^2}{2} + f(y, z)$, que l'on injecte dans l'équation 2 : $\frac{\partial f}{\partial y} = -K_1 y$ soit $f(y, z) = -K_1 \frac{y^2}{2} + g(z)$ et avec l'équation 3 : $g'(z) = -K_2 z$ soit $g(z) = -K_2 \frac{z^2}{2} + cte$. Au final : $P(x, y, z) = -K_1 \frac{x^2}{2} - K_1 \frac{y^2}{2} - K_2 \frac{z^2}{2} + cte$; à la surface libre, $P(x, y, z) = P_0$ soit $K_1 \frac{x^2}{2} + K_1 \frac{y^2}{2} + K_2 \frac{z^2}{2} = A$, qui se met sous la forme demandée avec $a = \frac{A}{K_1}$ et $b = \frac{A}{K_2}$.

11.

$$f = \frac{b-a}{a} = \frac{K_1}{K_2} - 1 = -\mathcal{E} = -3.10^{-3}$$

12. Deux causes possibles : pas de prise en compte des marées, et la Terre pas forcément incompressible.

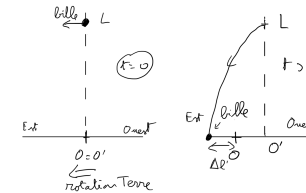
4) Déviation vers l'est

13. Pendule de Foucault, XIXème siècle.

14. Sans la force d'inertie de Coriolis, $\Delta\ell = 0$, donc $\Delta\ell$ correspond à la distance caractéristique du phénomène lié à cette force. Le mouvement se fait sur une distance typique h pendant un temps T ; si on ne considère que la pesanteur : $h = gT^2$ (chute libre) ; de plus $a_c = \frac{\Delta\ell}{T^2} = \omega_T^2 \frac{h}{T}$, soit $\Delta\ell = \omega_T h T = \omega_T h \sqrt{\frac{h}{g}}$ d'où le résultat.

15. $\Delta\ell = 2.10^{-2}$ m

18. O : mouvement rectiligne uniforme à $v_{O'} = \omega_T R_T$ vers l'est bille : mouvement vertical descendant (chute libre) ; mouvement parabolique avec $v_0 = \omega_T (R_T + h)$ vers l'est et le bas.



19. $\Delta\ell' = x_{chute} - v_{O'} \cdot T$ avec $T = \sqrt{\frac{h}{g}}$ et $v_{O'} = \omega_T R_T$.

x_{chute} est déterminé à l'aide de la trajectoire : $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ et $x(t) = v_0 t$, soit $z(x) = h - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2}$. De plus $z(x_{chute}) = 0$, soit $x_{chute} = \sqrt{\frac{2hv_0^2}{g}}$

et $\Delta\ell' = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} - \omega_T R_T \sqrt{\frac{h}{g}} \approx \omega_T R_T \sqrt{\frac{h}{g}}$; il y a bien déviation vers l'est !

20. A ce moment, la bille est plus "attirée" vers la Terre au fur et à mesure qu'elle chute.

5) Cas pratique : la planète de l'allumeur de réverbère

21. À partir des informations que l'on peut tirer de l'extrait du récit précédent, estimer les valeurs numériques de la masse M de la planète et de l'altitude H_s d'un satellite A329-stationnaire.
22. Estimer la valeur numérique de la taille maximale du réverbère si l'on suppose qu'il est juste posé verticalement sur le sol, à l'équateur de la planète (s'appuyer sur une modélisation simple du réverbère).