

Tout résultat d'un calcul devra présenter le bon nombre de chiffres significatifs. La notation tiendra largement compte du soin apporté à la rédaction. Encadrer les résultats. Les 2 problèmes sont à réaliser sur des copies différentes.

Problème 1 - Mesures interférométriques de longueurs d'ondes (d'après CCMP)

En 1907, Michelson est le premier américain à recevoir le prix Nobel de physique pour ses instruments optiques de précision et les mesures spectroscopiques et métrologiques réalisées au moyen de ceux-ci. En particulier, il publiera en 1892 des mesures relatives aux spectres d'émission de plusieurs sources, obtenues par spectroscopie interférentielle, et notamment pour les raies H_α (rouge) et H_β (bleue) d'émission par les atomes d'hydrogène.

1) L'interféromètre de Michelson

Le schéma du montage utilisé par Michelson est proposé figure 1. Le dispositif monochromateur, formé d'un prisme de verre dispersif et d'une fente étroite, éclaire l'appareil en sélectionnant une raie quasi-monochromatique de longueur d'onde λ_0 , appartenant au domaine visible. L'observation est réalisée au moyen d'un oculaire afocal, réglé à l'infini : il donne d'un objet situé à grande distance une image également à grande distance, mais agrandie.

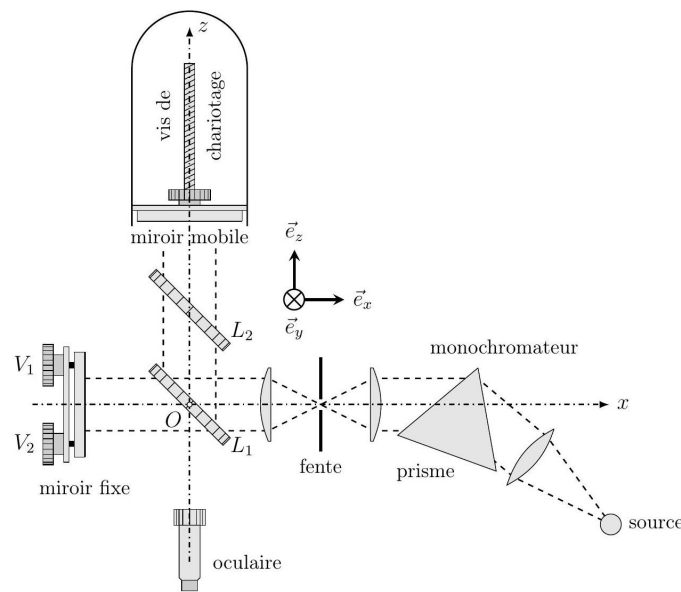


FIGURE 1 – Figure 1 - Dispositif de mesure en spectroscopie interférentielle

- L'interféromètre comporte deux lames de verre L_1 et L_2 , parallèles, de même épaisseur e et de même indice optique n , inclinées d'un angle $\pi/4$ relativement à l'axe (O, \vec{e}_x) normal au miroir fixe. La lame L_1 est munie d'une couche semi-réfléchissante sur une seule de ses faces ; laquelle ? Justifier, en vous appuyant sur un schéma.
- Après réglage des vis V_1 et V_2 les miroirs fixe et mobile sont rendus rigoureusement perpendiculaires ; l'axe optique (O, \vec{e}_z) de l'oculaire est alors confondu avec la normale au miroir mobile et l'opérateur observe, au moyen de cet oculaire réglé à l'infini, des franges d'interférence. Quelle est la forme de ces franges ?
Peut-on encore les observer si l'oculaire est dérégulé ?
- Tout en observant les franges, l'observateur peut actionner la vis micrométrique et déplacer le miroir mobile dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, le long de l'axe (O, \vec{e}_z) . Relier le nombre ΔN de franges sombres qui défilent au centre du champ et le décalage Δz du miroir mobile.
- Exprimer, au moyen d'un schéma approprié, la différence de marche observée à l'infini dans une direction donnée, en fonction de l'écart séparant les deux miroirs.
Le déplacement maximal de la vis micrométrique à partir du contact optique est noté Δz_{\max} . Déterminer, après ce déplacement, l'angle $\Delta\theta$ qui sépare le centre de la figure de la première frange de même nature.
- Dans le cas d'une des raies de l'hydrogène atomique, on observe le défilement de $N = 3156$ franges pour un décalage $\Delta z = 1035 \pm 2\mu\text{ m}$. S'agit-il de la raie H_α ou H_β ?
Avec quelle précision relative mesure-t-on sa longueur d'onde λ_0 ?
Que vaut alors $\Delta\theta$? Commenter.

2) Cohérence spectrale d'une source

Une source de lumière éclaire avec la même intensité I_0 les deux voies d'un interféromètre; l'observation est réalisée en un point où la différence de marche est δ .

6. Dans le cas où la source est rigoureusement monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , exprimer l'intensité $I(\delta)$ en fonction de I_0 , λ_0 et δ . Définir et calculer le facteur de contraste C des franges.

Certaines sources lumineuses sont en fait bichromatiques : elles émettent deux radiations de longueurs d'onde très proches λ_1 et λ_2 et on pose alors $\lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1|$ en admettant toujours $\Delta\lambda \ll \lambda_0$.

7. Pour certaines sources bichromatiques les deux radiations émises sont de même intensité; c'est le cas des lampes à vapeur de sodium, étudiées notamment par Michelson dans les conditions décrites au 1). Expliciter l'intensité I observée en fonction de I_0 , de la différence de marche δ , de λ_0 et de $\Delta\lambda$.

Exprimer le facteur de contraste C des franges et montrer comment il permet la mesure de $\lambda_0/\Delta\lambda$.

8. D'autres sources, comme celles émettant la raie H_α de l'hydrogène, peuvent être décrites comme bichromatiques mais les intensités I_1 et $I_2 < I_1$ émises aux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont différentes. Pour quelle(s) valeur(s) de δ le facteur de contraste des franges est-il minimal? Quelle est cette valeur minimale?

Dans le cas de la raie double H_α , l'écart $\Delta\lambda$ est de l'ordre de $1,4 \times 10^{-11}$ m. Est-il possible de le mettre en évidence avec le montage proposé ci-dessus?

Problème 2 : TERRE ! (d'après CCINP et Agrégation)

La Terre est un magnifique terrain d'expérimentation pour les physiciens, qui peuvent mettre à l'épreuve leurs théories et proposer des modèles des phénomènes naturels.

Ce sujet aborde diverses thématiques en lien avec la physique de la Terre et on explorera en particulier des questions relatives à l'application des lois de la mécanique dans le référentiel terrestre (parties 2) à 5)) ou géocentrique (partie 1)).

Formulaire et données

Consignes pour les applications numériques : les résultats des applications numériques seront donnés sous une forme identique à celle des données ci-dessous :

- Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 7.10^{-11} \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
- Rayon moyen de la Terre : $R_T = 6.10^3 \text{ km}$
- Masse de la Terre $M_T = 6.10^{24} \text{ kg}$
- Vitesse angulaire du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique galiléen $\omega_T = 7.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$
- Masse volumique moyenne de l'eau de mer $\rho_{mer} = 1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

1) Étude du mouvement d'un satellite

Les systèmes d'observation des océans par satellite ont été imaginés et développés au début des années 70. Depuis, plus d'une quinzaine de satellites d'observation embarquant des altimètres radars ont été lancés dans le but d'observer le comportement des océans.

Issues d'une coopération du CNES et de la NASA, la série des satellites Topex-Poséidon, initiée en 1992, puis celle des satellites Jason, ont permis de mesurer l'élévation moyenne des mers avec précision : $(3,6 \pm 0,1) \text{ mm/an}$ durant ces trente dernières années.

On se propose dans cette partie d'étudier le mouvement d'un tel satellite, en orbite autour du centre O de la Terre, modélisée par un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R_T et de masse M_T .

a) Force centrale conservative

On commence par étudier le mouvement d'un mobile quelconque, de masse m et assimilé à un point matériel M, dans le référentiel géocentrique (\mathcal{R}_g) considéré comme galiléen. Le mobile n'est soumis qu'à la seule action de la Terre.

1. Rappeler la définition du référentiel géocentrique et celle d'un référentiel galiléen.
2. Après avoir justifié la direction du champ de gravitation terrestre $\vec{\mathcal{G}}(M)$, donner l'expression de celui-ci en un point M extérieur à la Terre en fonction de la constante de gravitation universelle \mathcal{G} , de la masse M_T , de la distance $r = OM$ et du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{r}$. En déduire l'expression \vec{F}_g de la force de gravitation exercée par la Terre sur le mobile de masse m .

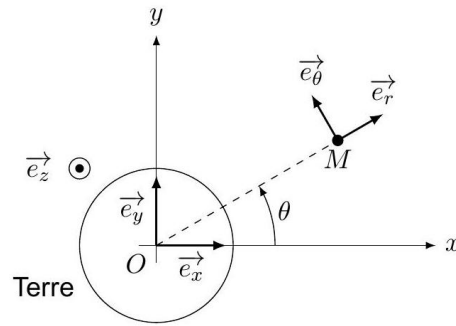


FIGURE 2 – Figure 2 - Description du mouvement du mobile dans le système de coordonnées polaires

3. Montrer que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O$ du mobile par rapport au point O est une constante du mouvement. En déduire que la trajectoire du mobile est plane.

Dans la suite, on associera au référentiel (\mathcal{R}_g) le repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de façon à ce que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O$ soit aligné avec \vec{e}_z . On posera $\vec{\mathcal{L}}_O = \mathcal{L}_0 \vec{e}_z$ et on se placera en coordonnées polaires (r, θ) , de centre O , pour décrire le mouvement du mobile (figure 2).

4. Montrer que la force gravitationnelle s'exerçant sur le mobile dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p . Établir l'expression de celle-ci en la prenant, par convention, nulle à l'infini.
5. Montrer que l'énergie mécanique \mathcal{E}_m est une constante du mouvement et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p, \text{eff}}(r) \quad (1)$$

où $\mathcal{E}_{p, \text{eff}}(r)$ est un terme, appelé énergie potentielle effective, que l'on exprimera en fonction de $\mathcal{G}, m, M_T, \mathcal{L}_0$ et de r .

6. Expliquer pourquoi l'énergie mécanique du mobile est nécessairement supérieure ou égale à son énergie potentielle effective.
7. Représenter graphiquement, pour une valeur donnée de \mathcal{L}_0 , l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p, \text{eff}}$ du mobile en fonction de r . Faire apparaître sur le graphique l'énergie mécanique d'une trajectoire associée à un état lié. On rappelle que, pour une force centrale en $1/r^2$, la trajectoire d'un état lié est elliptique.
8. Pour un mouvement elliptique quelconque, indiquer à quelles positions particulières l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective. Caractériser le mouvement du mobile dans le cas où l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective.

La plupart des mesures effectuées par les satellites altimétriques se font à partir de l'orbite altimétrique de référence, que l'on considèrera ici comme une orbite circulaire de rayon R . Dans la suite, le mobile étudié correspond à un satellite altimétrique de masse m , assimilable à un point matériel.

9. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m, \text{alt}}$ du satellite situé sur l'orbite altimétrique de référence, en fonction de \mathcal{G}, M_T, m et de R .
10. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier d'une orbite circulaire, en utilisant les paramètres liés à l'orbite altimétrique.

On admettra que la troisième loi de Kepler est valable plus généralement pour un mouvement elliptique. Son expression peut se déduire de l'équation obtenue pour le mouvement circulaire, en remplaçant le rayon R de l'orbite circulaire par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique.

b) Jason-2 : un exemple pour la fin de vie des satellites

En fin de vie, pour que ne soit pas laissé un objet non contrôlé sur l'orbite altimétrique de référence, le satellite Jason-2 a été dirigé vers une orbite dite "cimetièr", d'altitude légèrement moins haute que celle de l'orbite altimétrique de référence, avant d'être définitivement abandonné. On se propose dans cette sous-partie d'étudier le cas d'une manœuvre de ce type dans le cas très simplifié, illustré figure 3, d'un transfert entre deux orbites circulaires coplanaires sous la seule action de l'attraction terrestre. L'orbite de transfert, appelée orbite de Hohmann, correspond à une ellipse dont l'un des foyers est le centre O de la Terre, dont l'apogée A est situé sur l'orbite altimétrique de référence (rayon R) et dont le périégée P est sur l'orbite cimetièr (rayon R_c).

Pour modifier l'orbite du satellite, il faut l'accélérer ou le freiner en commandant le fonctionnement et la direction de ses moteurs. On considèrera que la poussée générée par ceux-ci s'exerce pendant une durée tellement courte que les changements d'orbites se font instantanément.

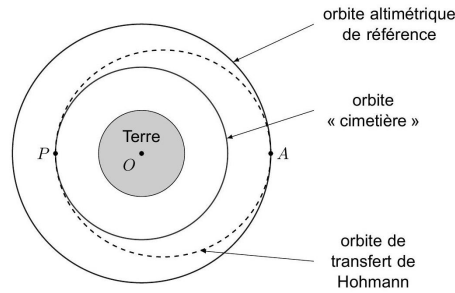


FIGURE 3 – Figure 3 - Tracé des différentes orbites du satellite

11. En utilisant l'équation (1), montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m, tr}$ du satellite sur l'orbite de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_{m, tr} = -\frac{GM_T m}{R + R_c}.$$

12. Exprimer la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m, tr} - \mathcal{E}_{m, alt}$ nécessaire pour passer de l'orbite initiale à l'orbite de transfert. Commenter le signe de $\Delta\mathcal{E}_m$.
13. En justifiant la réponse, indiquer s'il faut accélérer ou freiner le satellite pour le transférer en P de l'orbite de transfert à l'orbite cimetièrre.

2) Gravitation et pesanteur

- Soient deux points matériels M_1 et M_2 , de masses m_1 et m_2 . Exprimer la force de gravitation que M_1 exerce sur M_2 , en fonction en particulier de la distance $r = \|\vec{M}_1 M_2\|$ (faire un schéma de la situation pour préciser les notations). Nommer le physicien à qui l'on doit cette loi. Indiquer à quel siècle cette loi a été formulée.
- Reprendre l'expression du champ gravitationnel donné à la partie précédente et estimer la valeur numérique de l'intensité du champ gravitationnel G_0 à la surface de la Terre.
- La Terre tourne autour de l'axe des pôles, dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen. On suppose cette rotation uniforme de vitesse angulaire ω_T . Préciser si le référentiel terrestre est galiléen. Nommer chacune des forces supplémentaires qu'il faut rajouter dans l'application du principe fondamental de la dynamique à un point matériel, de masse m et de vitesse \vec{v} dans le référentiel terrestre, pour utiliser les lois de la mécanique dans ce référentiel. Donner les expressions de ces forces sans les établir.

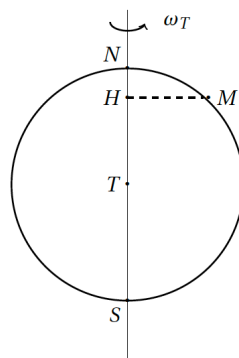


FIGURE 1 – Terre sphérique en rotation autour de l'axe des pôles

4. Donner la définition "expérimentale" du poids d'un corps ponctuel M de masse m , i.e. à l'aide d'un pendule en équilibre dans le référentiel terrestre. En déduire que le champ de pesanteur terrestre en un point M est donné par

$$\vec{g}(M) = -\frac{GM_T}{\|\vec{TM}\|^3} \vec{TM} + \omega_T^2 \vec{HM}$$

T étant le centre de la Terre et H le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles (figure 1).

5. Calculer la valeur numérique de $\Delta g = \|\vec{g}(N)\| - \|\vec{g}(E)\|$, différence des intensités de la pesanteur au pôle nord N et en un point E de l'équateur.

3) Aplatissement de la Terre

La force à l'origine de la distinction entre gravitation et pesanteur a pour conséquence un aplatissement de la Terre, que l'on se propose d'estimer à l'aide d'un modèle simple.

On peut établir que la résultante des forces de pression s'exerçant sur un volume mésoscopique $d\tau$ d'un fluide est donnée par $-\overrightarrow{\text{grad}}(P)d\tau$, où P désigne la pression du fluide pouvant dépendre du point étudié. Soient ρ la masse volumique du fluide et \vec{g} le champ de pesanteur en ce point. On peut alors en déduire que l'équation de la statique des fluides dans un référentiel galiléen s'écrit

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho\vec{g} = \vec{0}$$

6. On suppose l'eau de mer incompressible, de masse volumique moyenne ρ_{mer} . À la surface règne une pression $P_0 = 1.10^5$ Pa. Calculer la valeur numérique du facteur par lequel il faut multiplier cette pression pour obtenir la pression au fond de la fosse des Mariannes (profonde de $H = 1.10^4$ m). Le champ de pesanteur est supposé uniforme, de valeur $g = 1.10^1$ m.s⁻².
7. On prend en compte la faible compressibilité de l'eau. Prédire qualitativement si la pression au fond de la fosse des Mariannes est augmentée ou diminuée par rapport au calcul précédent.

On modélise la Terre par un fluide incompressible, de masse volumique $\rho_T = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3}$ en équilibre dans le référentiel terrestre, en rotation uniforme autour de l'axe des pôles fixe dans le référentiel géocentrique galiléen. Cette rotation fait que la Terre prend la forme d'un ellipsoïde de révolution. On note a le rayon terrestre au niveau de l'équateur et b au niveau des pôles (cf figure 2, où l'aplatissement est représenté de manière exagérée). On définit l'aplatissement f de la Terre par $f = \frac{b-a}{a}$.

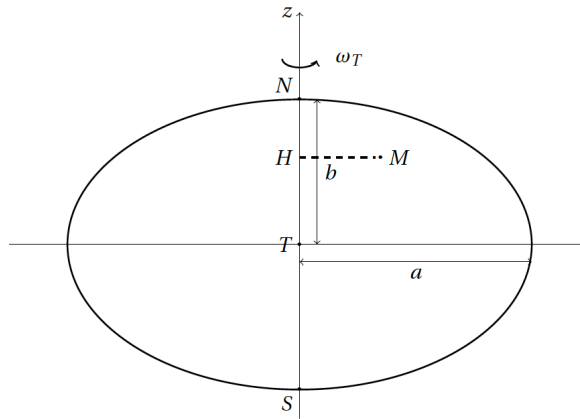


FIGURE 2 – Terre ellipsoïdale

8. On définit la quantité ε par la relation

$$\varepsilon = \frac{\omega_T^2 R_T^3}{\mathcal{G}M_T}$$

En l'écrivant sous la forme du rapport de deux forces par unité de masse, donner la signification physique de cette quantité. Estimer sa valeur numérique.

On admet que l'application de la loi de la statique des fluides dans le référentiel terrestre non galiléen se traduit par l'équation

$$\overrightarrow{\text{grad}}P = -\frac{4}{3}\pi\mathcal{G}\rho_T^2\overrightarrow{TM} + \rho_T\omega_T^2\overrightarrow{HM}$$

H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation. On travaille en coordonnées cartésiennes avec pour axe Tz l'axe des pôles.

9. Établir que le champ de pression P vérifie les trois équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -K_1 x \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -K_1 y \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -K_2 z \end{cases}$$

Exprimer les constantes K_1 et K_2 en fonction de constantes prises parmi ω_T , \mathcal{G} , ρ_T .

10. Résoudre ce système sans chercher à expliciter une éventuelle constante d'intégration apparaissant dans le calcul. Montrer que l'équation de la surface libre du fluide modélisant la Terre se met sous la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, équation d'un ellipsoïde de révolution.
11. En déduire l'expression de l'aplatissement f de la terre en fonction de K_1 et K_2 , puis de ε . Réaliser l'application numérique.
12. La valeur admise pour l'aplatissement est approximativement le double de la valeur numérique calculée dans la question précédente. Donner deux limites du modèle permettant d'expliquer cette différence de valeur.

4) Déviation vers l'est

Une expérience de chute libre dans le référentiel terrestre permet de mettre en évidence la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique. On peut citer par exemple l'expérience réalisée par Ferdinand Reich, en 1832, dans un puits de mine à Freiberg, au cours de laquelle des billes étaient lâchées avec une vitesse initiale nulle et dont le point de chute moyen n'était pas à la verticale du point de lâcher.

13. Citer une autre expérience mettant en évidence la rotation de la Terre. Nommer le concepteur de cette expérience et préciser au cours de quel siècle elle a été réalisée.

On travaille dans le référentiel terrestre, dans lequel on étudie la chute d'une bille lâchée avec une vitesse initiale nulle d'une hauteur h au dessus du sol, l'expérience ayant lieu à l'équateur. On prend comme repère (O, x, y, z) , O étant à la surface terrestre, à la verticale du point L du lâcher, (Ox) étant dirigé vers l'est, (Oy) vers le nord et (Oz) suivant la verticale ascendante (voir figure 3). On note $\vec{\omega}_T$ le vecteur rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique, g l'intensité du champ de pesanteur supposé uniforme et m la masse d'une bille.

On néglige tout frottement.

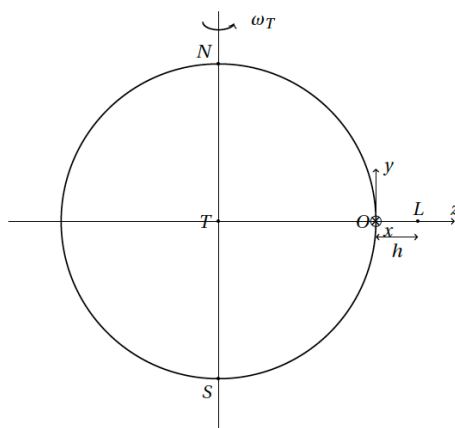


FIGURE 3 – Expérience de chute dans le référentiel terrestre

14. En analysant les phénomènes en cause et en vous appuyant sur les équations qui les régissent, établir que l'expression de la distance $\Delta\ell$ qui sépare le point de chute de la bille du point O , et qui est due à la force de Coriolis, est donnée par (sans se soucier d'éventuels facteurs numériques) : $\Delta\ell = \omega_T \sqrt{\frac{h^3}{g}}$
15. Calculer la valeur numérique de $\Delta\ell$ pour $h = 1.10^2$ m et $g = 1.10^1$ m.s⁻².

On étudie cette même expérience dans le référentiel géocentrique supposé galiléen (une approche d'ailleurs suivie par Newton). La durée de l'expérience étant très faible devant la période de rotation propre de la Terre, on néglige la rotondité de la Terre. Le champ gravitationnel est supposé uniforme, de norme g_0 . On note O' le point fixe du référentiel géocentrique confondu avec O à l'instant du lâcher de la bille.

18. Préciser quelles sont, dans le référentiel géocentrique, les natures des mouvements et des trajectoires de la bille et du point O . Représenter ces dernières sur un schéma clair et annoté. Justifier que pour un observateur terrestre la déviation a bien lieu vers l'est.
19. Calculer l'expression de la distance $\Delta\ell'$ entre le point de chute de la bille et le point O .
20. Ce modèle ne donne pas un résultat entièrement satisfaisant car on a supposé le champ gravitationnel uniforme. Indiquer quelle serait la nature de la trajectoire de la bille dans le référentiel géocentrique en prenant pour champ gravitationnel celui de la question 2.

5) Cas pratique : la planète de l'allumeur de réverbère

Dans le chapitre XIV du Petit Prince d'Antoine de Saint-Exupéry, on trouve la description de la cinquième planète visitée par le héros, la planète de l'allumeur de réverbère (astéroïde A329). Une illustration très fidèle de la situation est donnée par la figure 4.

Extrait :

La cinquième planète était très curieuse. C'était la plus petite de toutes. Il y avait là juste assez de place pour loger un réverbère et un allumeur de réverbères.

[...]

Le petit prince le regarda et il aima cet allumeur qui était tellement fidèle à la consigne. Il se souvint des couchers de soleil que lui-même allait autrefois chercher, en tirant sa chaise. Il voulut aider son ami :

-Tu sais...je connais un moyen de te reposer quand tu voudras...

-Je veux toujours, dit l'allumeur.

Car on peut être, à la fois, fidèle et paresseux.

Le petit prince poursuivit :

-Ta planète est tellement petite que tu en fais le tour en trois enjambées. Tu n'as qu'à marcher assez lentement pour rester toujours au soleil. Quand tu voudras te reposer tu marcheras... et le jour durera aussi longtemps que tu voudras.

- Ça ne m'avance pas à grand'chose, dit l'allumeur. Ce que j'aime dans la vie, c'est dormir.

- Ce n'est pas de chance, dit le petit prince.

- Ce n'est pas de chance, dit l'allumeur.

[...]

Ce que le petit prince n'osait pas s'avouer, c'est qu'il regrettait cette planète bénie à cause, surtout, des mille quatre cent quarante couchers de soleil par vingt-quatre heures.

Par ailleurs le petit prince ne semble pas s'être plaint d'une pesanteur ou trop forte ou trop faible sur la planète.



FIGURE 4 – Cinquième planète de l'allumeur de réverbère (issu du Petit Prince de Saint-Exupéry)

L'évaluation des réponses aux deux questions suivantes porte tout particulièrement sur l'analyse physique des situations, la qualité de la rédaction et la mise en place d'une démarche de résolution.

21. À partir des informations que l'on peut tirer de l'extrait du récit précédent, estimer les valeurs numériques de la masse M de la planète et de l'altitude H_s d'un satellite A329-stationnaire.
22. Estimer la valeur numérique de la taille maximale du réverbère si l'on suppose qu'il est juste posé verticalement sur le sol, à l'équateur de la planète (s'appuyer sur une modélisation simple du réverbère).

FIN DE L'ÉNONCÉ