

Introduction

Table des matières

I - Équation de Navier-Stokes	1
1) Expression	1
2) Lien avec le nombre de Reynolds	2
3) Conditions aux limites	2
4) Exemples d'application	4
II - Théorème de Bernoulli	6
1) Équation d'Euler	6
2) Théorème de Bernoulli	6
3) Application 1 : formule de Torricelli	8
4) Application 2 : effet Venturi	9
5) Application 3 : tube de Pitot	10

I - Équation de Navier-Stokes

1) Expression

On part du TRC pour une particule de fluide dans le référentiel du fluide. On suit ici une particule dans son écoulement, de masse $dm = \rho d^3\tau_M$ centrée en M à l'instant t dans un écoulement incompressible.

BAME : poids dont l'expression volumique est $\rho \vec{g} d^3\tau$, d'autres forces à distance $\vec{F}_{autres} = \vec{f}_{autres} d^3\tau_M$, la force de pression dont l'équivalent volumique est $-\overrightarrow{\text{grad}}(P) d^3\tau_M$ et la force de viscosité, dont l'équivalent volumique est $\eta \vec{\Delta} \vec{v} d^3\tau_M$. On aura

$$dm \vec{a} = \rho \vec{g} d^3\tau + \vec{f}_{autres} d^3\tau_M - \overrightarrow{\text{grad}}(P) d^3\tau_M + \eta \vec{\Delta} \vec{v} d^3\tau_M$$

soit, en divisant tout par le volume de la particule de fluide :

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{g} + \vec{f}_{autres} - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

où $\vec{a}$ est l'accélération de la particule à comprendre au sens de *l'accélération particulaire*, car on suit la particule de fluide dans son mouvement. On en déduit l'**équation de Navier-Stokes** :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} + \vec{f}_{autres} - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

Remarque :

- Pour un fluide au repos, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont nuls, on trouve alors

$$\rho \vec{g} + \vec{f}_{autres} - \overrightarrow{\text{grad}}(P) = \vec{0}$$

qui correspond à la relation fondamentale de la statique des fluides ! Cours de sup à réviser : poussée d'Archimède, équation barométrique, atmosphère en équilibre isotherme.

- L'équation de Navier-Stokes est une équation locale non linéaire difficile à résoudre analytiquement... Cette équation recèle encore quelques mystères qui résistent à la sagacité de nos meilleurs mathématiciens puisque l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation de Navier-Stokes est l'un des 7 problèmes du millénaire mis à prix 1000000 \$ par l'Institut Clay !

Cependant, couplée avec l'hypothèse d'incompressibilité, l'équation d'état du fluide et un bilan d'énergie, l'équation de Navier-Stokes permet de déterminer l'écoulement. Une fois le système d'équations résolu, les constantes sont déterminées au moyen des conditions initiales et (ou) des conditions aux limites. Dans une partie suivante, seront explicitées les conditions aux limites cinématiques et les conditions aux limites sur les contraintes.

2) Lien avec le nombre de Reynolds

Les termes convectif et diffusif apparaissent naturellement dans cette équation, le nombre de Reynolds établit donc la comparaison de ces deux termes dans l'équation de Navier-Stokes.

On rappelle que

$$Re = \frac{\|(\rho \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \vec{\Delta}(\vec{v})\|} = \frac{\rho V^2}{L} \frac{L^2}{\eta V} = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{LV}{\nu}$$

3) Conditions aux limites

On va étudier quelles sont les conditions aux limites à imposer à un fluide (visqueux ou non) à l'interface avec soit un autre fluide, soit un solide.

Les principes sont les suivants :

FLUIDE VISQUEUX

- Continuité de la vitesse à la traversée d'une interface.
- Continuité de la contrainte normale, donc de la pression (interface fluide-fluide).
- Continuité de la contrainte tangentielle.

FLUIDE PARFAIT

- Continuité de la vitesse normale à la traversée d'une interface.
- Continuité de la contrainte normale, donc de la pression (interface fluide-fluide).

a) Interface fluide-fluide

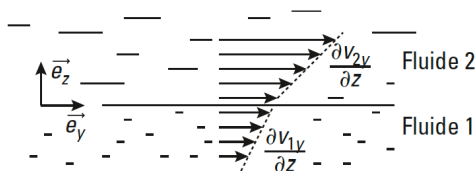
Fluide visqueux

Propriété :

Dans un écoulement visqueux entre deux fluides (non miscibles ou très faiblement miscibles) notés (1) et (2), le premier fluide (1) s'accroche sur le second (2). À l'interface des deux fluides, les vitesses sont égales. Ainsi

$$\vec{v}_{(1)} = \vec{v}_{(2)}$$

À l'interface entre deux fluides (non miscibles ou très faiblement miscibles), outre la continuité sur les vitesses, la contrainte est également continue. Ainsi, les contraintes normales et tangentielles des deux fluides à l'interface sont égales. Sur le schéma ci-dessous est représenté le cas particulier où le second fluide entraîne tangentielllement le premier fluide.



Propriété :

La continuité des contraintes tangentielles et normales imposent que les pressions dans chaque fluide soient égales et que les produits des gradients de vitesse avec les viscosités des deux fluides soient égaux. Ainsi

$$P_{(1)} = P_{(2)}$$

et

$$\eta_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} = \eta_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial y}$$

Fluide parfaitPropriété :

Dans un écoulement parfait et incompressible de deux fluides (non miscibles ou très faiblement miscibles) notés (1) et (2), le fluide (1), à l'interface, glisse parfaitement sur le second (2). Il n'y a aucune condition à imposer sur les composantes tangentielles des vitesses ; seules les composantes normales des vitesses à l'interface sont égales. Ainsi

$$\vec{v}_{(1)} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{(2)} \cdot \vec{n}$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à l'interface.

Puisqu'il n'y a pas de condition sur les vitesses tangentielles : les fluides peuvent glisser l'un sur l'autre avec des vitesses différentes.

Propriété :

La continuité de la contrainte normale impose que les pressions dans chaque fluide soient égales :

$$P_{(1)} = P_{(2)}$$

b) Interface fluide-solide**Fluide visqueux**Propriété :

Dans un écoulement visqueux, le fluide ne peut pénétrer dans le solide et, du fait des forces de viscosité, il s'accroche à la paroi de ce dernier. *Dans le référentiel du solide*, la vitesse du fluide est nulle. Ainsi, à la surface de contact solide ? fluide

$$\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{solide}$$

Propriété :

La continuité des contraintes impose l'égalité des pressions au niveau de la paroi.

$$P_{fluide} = P_{paroi}$$

Fluide parfait

Propriété :

Dans un écoulement parfait et incompressible, le fluide ne peut pénétrer dans le solide et il glisse parfaitement sur ce dernier. Ceci impose que les composantes normales des vitesses à la surface de contact fluide- solide soient égales. Ainsi

$$\vec{v}_{fluide} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{solide} \cdot \vec{n}$$

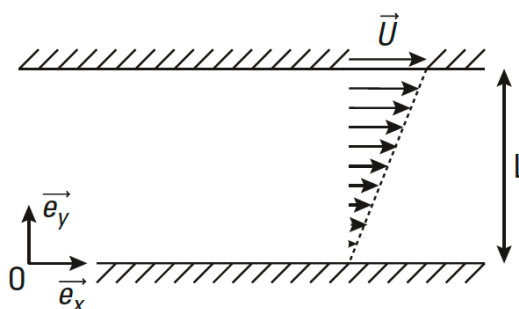
où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à l'interface.

De même, la continuité des contraintes impose l'égalité des pressions :

$$P_{fluide} = P_{paroi}$$

c) Tableau récapitulatif

Interface	Fluide parfait	Fluide visqueux
Fluide $\rightarrow$ Solide	$\vec{v}_{fluide} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{solide} \cdot \vec{n}$ $P_{fluide} = P_{paroi}$	$\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{solide}$ $P_{fluide} = P_{paroi}$
Fluide (1) $\rightarrow$ Fluide (2)	$\vec{v}_{(1)} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{(2)} \cdot \vec{n}$ $P_{(1)} = P_{(2)}$	$\vec{v}_{(1)} = \vec{v}_{(2)}$ $P_{(1)} = P_{(2)}$ $\eta_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} = \eta_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial y}$

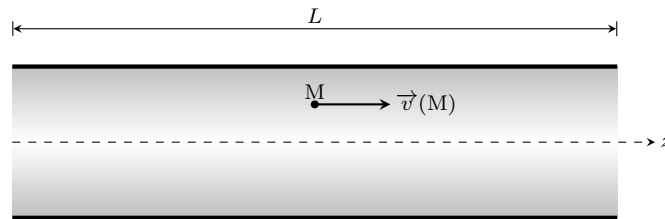
4) Exemples d'application**a) Écoulement de Couette plan**

On considère un écoulement d'un fluide newtonien de viscosité η et de masse volumique ρ sur une profondeur L . Sur ce dernier est déposée une plaque de dimension infinie dans les directions $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ qui se déplace avec une vitesse constante $\vec{U} = U\vec{e}_x$. Enfin, l'écoulement est supposé incompressible, stationnaire et laminaire.

Cherchons à déterminer le champ de vitesse en un point M quelconque de l'écoulement. Compte tenu de la géométrie du problème, la vitesse de l'écoulement est seulement selon l'axe $\vec{e}_x$ et elle ne dépend que de la variable y . En effet, il y a invariance de l'écoulement par translation dans la direction $\vec{e}_z$. Ainsi, la vitesse ne dépend pas de la variable z . De plus, l'écoulement étant incompressible, la divergence de la vitesse est nulle

b) Écoulement de Poiseuille

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux dans un long tube cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$. Le tube est horizontal (orienté suivant Oz) et l'écoulement est assuré grâce à l'existence d'une différence de pression Δp entre l'entrée du tube et la sortie du tube.



Hypothèses de travail

- L'écoulement est permanent donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$;
- L'écoulement est incompressible, par conséquent $\text{div} \vec{v} = 0$;
- Le nombre de Reynolds est suffisamment petit pour supposer un régime d'écoulement laminaire. En pratique, on considère que c'est le cas dans cette situation, lorsque $Re < 2000$;
- L'écoulement est parallèle à Oz et invariant par rotation autour de l'axe Oz , d'où $\vec{v} = v(r, z)\vec{u}_z$;
- Enfin, on néglige la pesanteur car $\rho g R \ll \Delta p$.

Calcul du champ de vitesse

II - Théorème de Bernoulli

Dans toute cette partie, les écoulements sont considérés parfaits. Je rappelle ici ce que cela signifie (avec une précision supplémentaire).

A RETENIR

Un écoulement est dit **parfait** si

- Les forces de viscosité sont négligeables
- Les particules de fluide évoluent de façon isentropique

1) Équation d'Euler

Dans le cas où les forces de viscosité sont négligeables (plus précisément si le nombre de Reynolds R_e est grand, le terme convectif est très grand devant le terme diffusif, que l'on peut supprimer), et on en déduit donc l'**équation d'Euler**

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} + \vec{f}_{\text{autres}} - \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

Remarque :

Si l'accélération est nulle (c'est-à-dire que l'écoulement est stationnaire et non convectif), alors on retrouve la Relation Fondamentale de la Statique des Fluides (RFSF) qui permet de trouver la pression dans un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme (par exemple, si les autres forces en volume sont nulles.)

L'équation d'Euler est une équation aux dérivées partielles du premier ordre. On remarque qu'elle est non linéaire à cause de la présence du terme convectif $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$; c'est ce qui rend les problèmes de mécanique des fluides mathématiquement redoutables à nouveau...

Regardons si nous disposons d'assez d'équations pour traiter un problème de mécanique des fluides parfaits.

Le fluide est incompressible : dans ce cas la masse volumique est fixée. Le problème présente donc 4 inconnues scalaires : le champ de pression $p(M, t)$ et le champ de vitesse $\vec{v}(M, t)$ (3 composantes). Il faut donc 4 équations scalaires ! L'équation d'Euler n'en donne que 3. La quatrième est donnée par l'équation $\text{div} \vec{v} = 0$

Le fluide est compressible : la masse volumique peut varier sous l'effet de la pression mais aussi sous l'effet du transfert thermique. En général le fluide possède une équation d'état locale $\rho(p, T)$. Le problème présente donc 6 inconnues scalaires : le champ de pression $p(M, t)$, les trois composantes du champ de vitesse $\vec{v}(M, t)$, la masse volumique $\rho(M, t)$ et la température $T(M, t)$. Il faut donc 6 équations scalaires. L'équation d'Euler en donne 3, la quatrième est donnée par l'équation de conservation de la masse, la cinquième par l'équation d'état du fluide et la dernière par le premier principe de la thermodynamique. Dans ce cas une bonne modélisation des transferts thermiques est nécessaire ce qui rend le problème très ardu. Par exemple, étudier une étoile ou la combustion d'une flamme nécessite ces 6 équations et surtout de gros ordinateurs...

L'équation d'Euler et de conservation de la masse sont des équations différentielles du premier ordre ; leur intégration va donc produire une constante d'intégration par variable. On déterminera ces constantes d'intégration par les conditions aux interfaces (fluide (1)/fluide (2) ou fluide/solide).

2) Théorème de Bernoulli

Théorème :

dans un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen, on a l'égalité :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{cste}$$

La constante est la même **sur une ligne de courant**. Quand on change de ligne de courant, la constante change.

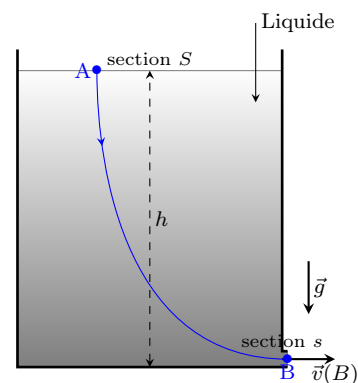
Démo

3) Application 1 : formule de Torricelli

Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. La formule de Torricelli relie le débit d'écoulement avec la hauteur de liquide h . On fera les hypothèses suivantes :

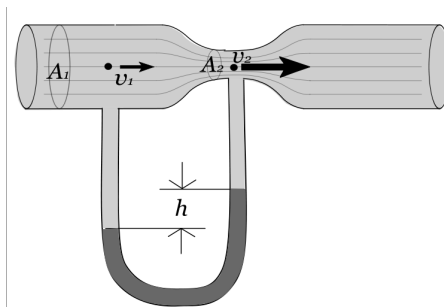
- La section S du cylindre est très grande devant la section de l'orifice : $s \ll S$;
- On considère le liquide incompressible et parfait ;
- Enfin, on considère que l'écoulement est en régime stationnaire.

On cherche à calculer la vitesse d'écoulement v à la sortie du trou. L'application du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant (entre A et B) donne :



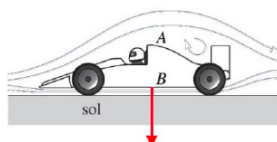
4) Application 2 : effet Venturi

Dans un tube horizontal de section S variable, l'écoulement d'un fluide en écoulement incompressible et permanent s'accompagne d'une dépression là où il y a rétrécissement : c'est l'*effet Venturi*.

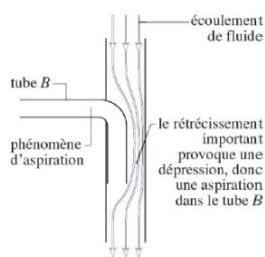


Cet effet peut être mis à profit pour les applications suivantes :

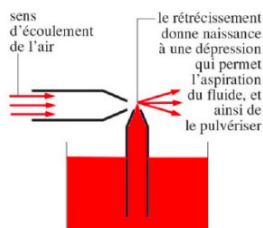
- Mesure de débit ou de vitesse ;
- Principe des trompes à eau montées sur les robinet des paillasse de chimie ;
- Douchette venturi produisant une économie d'eau ;
- Amélioration du tirage d'une cheminée, principe du carburateur, vaporisateur, etc.



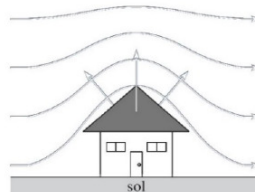
Effet de sol pour un véhicule de compétition : $P_A > P_B$.



Principe de la trompe à eau.



Principe de fonctionnement d'un vaporisateur ou d'un pistolet à peinture.



Les lignes de courant au voisinage d'un toit sont plus « serrées ». La pression sur le toit est plus faible que la pression à l'intérieur de la maison.

5) Application 3 : tube de Pitot

Le tube de Pitot permet la mesure de la vitesse d'écoulement d'un gaz subsonique ($v \ll c_{son}$). On peut en effet le considérer incompressible dans ce cas. On pratique dans un tube un orifice de prise de pression en A et en B. Le point A est un point d'arrêt car la vitesse est nulle (il n'y a pas d'écoulement dans l'orifice, c'est juste une prise de pression). Loin du tube de Pitot l'écoulement est supposé uniforme de vitesse v_∞ et de pression p_0 . En B la pression vaut p_0 car les lois de l'hydrostatique s'appliquent dans une direction perpendiculaire à un écoulement parallèle permanent incompressible.

