Introduction

Après avoir décrit l'écoulement d'un fluide localement, nous allons essayer de le décrire en réalisant des bilans à l'échelle macroscopique des grandeurs physiques intéressantes (masse, quantité de mouvement et énergie cinétique), pour démontrer que ceux-ci se rapprochent de tout ce qui a été dit, mais a l'avantage de ne pas décrire certaines parties du fluide trop complexes.

Le principe de ces bilans est de reconstruire les équations de la dynamique (PFD, TEC ou TPC), en raisonnant comme pour l'équation locale de conservation de la masse.

Table des matières

I - Bilan de masse

1) Système fermé mobile

On se ramène ici à un système fermé (Σ) que l'on suit pendant son écoulement (vu lors du premier chapitre de thermo...).

On considère un écoulement uniforme et unidirectionnel dans une canalisation cylindrique de section S en entrée et en sortie.

On considère le système ouvert (Σ^*) indéformable et fixe, délimité par la surface de contrôle. Entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, une masse δm_e de fluide entre dans le système ouvert et une masse δm_s en ressort.

Le fluide entrant a pour masse volumique $\rho(x,t)$ et pour vitesse $\vec{v}_e = v(x,t)\vec{u}_x$. De la même manière, la fluide sortant a pour masse volumique $\rho(x+\mathrm{d}x,t)$ et pour vitesse $\vec{v}_s = v(x+\mathrm{d}x,t)\vec{u}_x$.

On considère également le système fermé (Σ) qui contient à l'instant t le fluide entrant et le fluide contenu dans (Σ^*). Du fait de l'écoulement, à l'instant $t + \mathrm{d}t$, le système a évolué et il est constitué du fluide sortant et du fluide contenu dans (Σ^*). Puisque le système (Σ) est fermé, sa masse totale est conservée :

$$m_\Sigma(t+\mathrm{d}t) = m_\Sigma(t)$$

Puisque la masse est extensive on a :

$$m_\Sigma(t+\mathrm{d}t) = m_{\Sigma^*}(t+\mathrm{d}t) + \delta m_s$$

et

$$m_\Sigma(t) = m_{\Sigma^*}(t) + \delta m_e$$

$m_{\Sigma^*}(t) = \mathrm{d}\tau * \rho(x,t)$ et $m_{\Sigma^*}(t+\mathrm{d}t) = V_0 * \rho(x, t+\mathrm{d}t)$: l'écoulement n'est pas forcément **stationnaire**.
$\delta m_e = S_e.\rho(x,t).v_e\mathrm{d}t$ et $\delta m_s = S_s.\rho(x+\mathrm{d}x,t).v_s\mathrm{d}t$.
On a alors ($\mathrm{d}\tau = S\mathrm{d}x$) :

$$S\mathrm{d}x\left(\rho(x,t+\mathrm{d}t) - \rho(x,t)\right) = \left(S_e v(x,t)\rho(x,t) - S_s v(x+\mathrm{d}x,t)\rho(x+\mathrm{d}x,t)\right)\mathrm{d}t$$

Comme ici $S_e = S_s = S$; on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}}$$

qui correspond bien à l'équation locale de conservation de la masse.

2) Système ouvert fixe

On a déjà étudié cela dans le chapitre 1, en considérant un système ouvert dans lequel de la masse entrait et sortait à tout instant. Je propose une deuxième fois la démonstration :

On considère un écoulement unidimensionnel dans la direction Ox, et on souhaite établir l'équation locale de conservation de la masse. On raisonne de manière similaire au premier chapitre de l'année pour établir le premier et deuxième principe en écoulement permanent.

L'écoulement se passe dans une canalisation de section S supposée constante, et on considère le système constitué du fluide entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$.

Nous allons estimer la variation de masse de ce système en deux étapes :

1. Tout d'abord on réalise le bilan net (différence entre l'entrée et la sortie) de masse pendant un temps $\mathrm{d}t$:

$$\delta m_{ent}(x) = j(x,t).S.\mathrm{d}t$$

   où $j(x,t)$ est le vecteur (en projection sur Ox) densité de courant de masse.

$$\delta m_{sort}(x+\mathrm{d}x) = j(x+\mathrm{d}x,t).S.\mathrm{d}t$$

   En conséquence, la masse entrante pendant $\mathrm{d}t$ est

$$\Delta m_{entrante,\mathrm{dt}} = \delta m_{ent}(x) - \delta m_{sort}(x+\mathrm{d}x) = S\mathrm{d}t(j(x,t) - j(x+\mathrm{d}x,t))$$

2. Cette différence entre masse entrante et sortante est associée à une variation de masse volumique entre t et $t+\mathrm{d}t$:

$$\Delta m = (\rho(x,t+\mathrm{d}t) - \rho(x,t))S\mathrm{d}x$$

L'égalité de ces deux bilans donne :

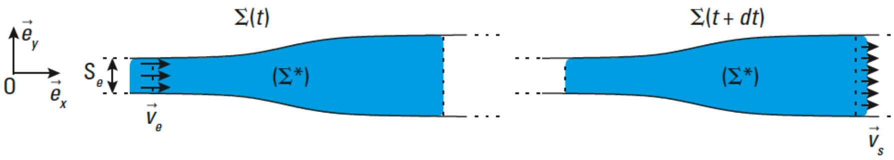
$$S\mathrm{d}x\frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}t = -S\mathrm{d}t\frac{\partial j}{\partial x}\mathrm{d}x$$

soit l'équation de conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{\partial j}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) = 0}$$

II - Bilan de quantité de mouvement

1) Construction du bilan



On considère un écoulement **incompressible** et **stationnaire** à travers une canalisation cylindrique qui s'élargit progressivement entre la section d'entrée S_e et la section de sortie S_s. De plus, on suppose que l'écoulement est unidirectionnel et uniforme dans une section de la conduite. En un point M quelconque de la canalisation, la vitesse s'écrit $\vec{v} = v_x(x,t)\vec{e}_x$.

On considère le système ouvert (Σ^*) indéformable et fixe, délimité par la surface de contrôle schématisée en pointillés. Entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, une masse élémentaire δm_e de fluide entre dans le système ouvert et une masse δm_s en ressort. De plus, comme on peut le voir sur le schéma, le fluide entrant qui a pour masse δm_e, pour vitesse $\vec{v}_e$ et pour pression P_e. De la même manière, le fluide sortant qui a pour masse δm_s, a pour vitesse $\vec{v}_s$ et pour pression P_s.

On considère également le système fermé (Σ) qui contient, à l'instant t, le fluide entrant et le fluide contenu dans (Σ^*). Du fait de l'écoulement, à l'instant $t + \mathrm{d}t$, le système a évolué et il est constitué du fluide sortant et du fluide contenu dans (Σ^*). Puisque le système (Σ) est fermé, sa masse totale est conservée entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

a) Etape 1 : conservation de la masse

La conservation de la masse donne :

$$m_\Sigma(t + \mathrm{d}t) = m_\Sigma(t)$$

qui se restreint à $\delta m_s = \delta m_e$ en régime stationnaire, soit

$$\mathrm{d}m = \delta m_s - \delta m_e = \rho \mathrm{d}t(S_s v_s - S_e v_e) = 0$$

qui impose la conservation du débit de volume $D_{vs} = D_{ve}$

b) Etape 2 : Principe fondamental de la dynamique

Le but ici est de reconstruire le PFD, en réalisant un bilan de quantité de mouvement. On estime :

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}_\Sigma(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}_\Sigma(t)$$

où $\vec{p}_\Sigma(t + \mathrm{d}t) = \vec{p}_{\Sigma^*}(t + \mathrm{d}t) + \vec{p}_s$ et $\vec{p}_\Sigma(t) = \vec{p}_{\Sigma^*}(t) + \vec{p}_e$.
Puisque l'on est en régime stationnaire, $\vec{p}_{\Sigma^*}(t + \mathrm{d}t) = \vec{p}_{\Sigma^*}(t)$, et donc :

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}_s - \vec{p}_e = \delta m_s \vec{v}_s - \delta m_e \vec{v}_e$$

La partie précédente nous affirme que $\delta m_s = \delta m_e = \rho D_v \mathrm{d}t$.
Au final, la variation de quantité de mouvement entre les instants t et t+$\mathrm{d}t$ vaut :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \rho D_v (v_s - v_e)\vec{e}_x$$

Le PFD nous permet alors d'affirmer que la résultante des actions extérieures exercées sur (Σ) s'écrit

$$\boxed{\vec{F} = \rho D_v (v_s - v_e)\vec{e}_x}$$

c) Cas particulier : écoulement parfait

Dans l'exemple choisi, le fluide avant (Σ) exerce sur lui une force de pression $\vec{F}_{pe} = P_e S_e \vec{e}_x$, alors que le fluide après (Σ) exerce sur lui une force de pression $\vec{F}_{ps} = -P_s S_s \vec{e}_x$; le théorème de Bernoulli (dans le cas de l'écoulement parfait, donc...) permet d'écrire que

$$P_s = P_e + \frac{1}{2}\rho(v_e^2 - v_s^2) = P_e + \frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{S_e^2}{S_s^2}\right)v_e^2$$

en utilisant la conservation du débit de volume. De plus, les actions mécaniques subies par le système sont donc ces deux forces de pression et la force de la paroi sur le fluide $\vec{F} = F\vec{e}_x$.

On a alors

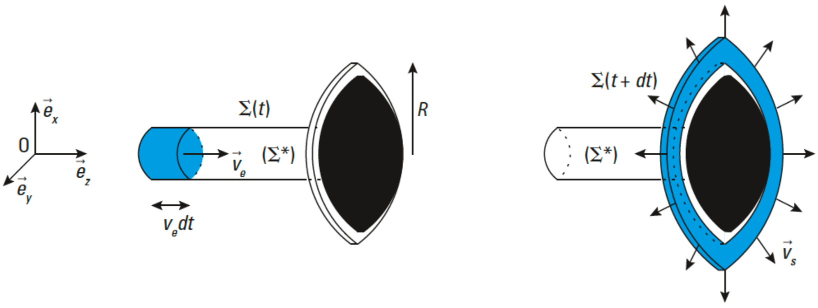
$$F = \rho D_v(v_s - v_e) - P_e S_e + P_s S_s = P_e(S_e - S_s) - \frac{1}{2}\rho\frac{D_v^2}{S_e}\left(\sqrt{\frac{S_e}{S_s}} - \sqrt{\frac{S_s}{S_e}}\right)^2$$

2) Exemple : fusée

Une fusée, dont la masse totale à l'instant t est $m(t)$, a un mouvement d'ascension supposé rectiligne à la vitesse $\vec{v}(t)$. Les gaz issus de la combustion du carburant et du comburant sont éjectés vers l'arrière de la fusée avec une vitesse $\vec{u}$ par rapport à la fusée supposée constante. Enfin, on note D_m le débit de masse d'éjection des gaz qui est supposé constant.

1. Trouver la force de propulsion de la fusée.
2. Donner l'expression de la vitesse de la fusée en fonction du temps lors de l'ascension.

3) Exemple : Action d'un jet cylindrique sur un disque



On considère un jet d'eau horizontal et cylindrique assimilé à un écoulement incompressible et stationnaire. La section de ce jet d'eau de masse volumique ρ est notée s. On suppose que l'écoulement incident est unidirectionnel et uniforme dans tout le jet. En un point M quelconque du jet incident, la vitesse s'écrit

$$\vec{v}(M) = \vec{v}_e = v_e \vec{e}_z$$

où v_e est une constante positive. Le jet frappe ensuite un disque de rayon R qui est maintenu par une personne. La pesanteur est négligée et la pression atmosphérique P_0 est supposée constante. Quelle doit être la force à appliquer par cette personne pour que le disque reste immobile ?

III - Bilan d'énergie cinétique

1) Construction du bilan

On reprend le système fermé du II et on estime l'énergie cinétique $E_{c,\Sigma}(t+\mathrm{d}t)$ et $E_{c,\Sigma}(t)$:
$E_{c,\Sigma}(t+\mathrm{d}t) = E_{c,\Sigma^*}(t+\mathrm{d}t) + \frac{1}{2}\delta m_s v_s^2$
$E_{c,\Sigma}(t) = E_{c,\Sigma^*}(t) + \frac{1}{2}\delta m_e v_e^2$
On en déduit le théorème de la puissance cinétique :

$$\boxed{\frac{E_{c,\Sigma}(t+\mathrm{d}t) - E_{c,\Sigma}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_{c,\Sigma^*}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}D_{m,s}v_s^2 - \frac{1}{2}D_{m,e}v_e^2 = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}}$$

Dans le cas particulier d'un écoulement stationnaire, le débit de masse se conserve le long d'un tube de courant si bien que $D_{m,s} = D_{m,e}$; par ailleurs, l'énergie cinétique du système ouvert est constante, soit

$$D_m\left(\frac{1}{2}v_s^2 - \frac{1}{2}v_e^2\right) = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

Si de plus, l'écoulement est **incompressible** et **parfait**, la puissance des forces intérieures est nulle de telle sorte que le bilan ne fait plus intervenir que les forces extérieures :

$$D_m\left(\frac{1}{2}v_s^2 - \frac{1}{2}v_e^2\right) = \mathcal{P}_{ext}$$

A Retenir

Ce bilan d'énergie cinétique fait intervenir la puissance des forces intérieures. Toutefois, la puissance des forces de pression est nulle lorsque l'écoulement est incompressible, car le volume des particules de fluide ne varie pas. La puissance des forces de viscosité est nulle lorsque l'écoulement est parfait car la viscosité est nulle. Retenons alors que $\mathcal{P}_{int}$ est nulle lorsque l'écoulement est parfait et incompressible.

Remarque :
lorsque l'écoulement est incompressible mais visqueux, $\mathcal{P}_{int}$ désigne la puissance des forces intérieures de viscosité. Le bilan d'énergie cinétique permet alors de déterminer cette puissance difficielement accessible par un calcul direct. Notons que les forces de viscosité sont dissipatives : il faut donc s'attendre à trouver une puissance négative.

2) Interprétation énergétique de la relation de Bernoulli

Reprenons le bilan d'Ec dans le cas stationnaire ; on suit alors un tube de courant. Les forces extérieures regroupent :
— Le poids : pendant dt, tout se passe comme si une masse δm passait de la cote z_1 à la cote z_2. Le travail du poid est donc $\delta W_g = \delta m g(z_1 -_2$ et sa puissance $D_m g(z_1 -_2)$
— Les forces de pression s'appliquant sur les frontières du système : leur travail est nul sur les parois latérales car elles y sont orthogonales au vecteur vitesse ; en revanhce leur travail est moteur en amont et résistant en aval et $\delta W_{p,ext} = \delta m(p_1/\rho_1 - p_2/\rho_2)$; la puissance des forces extérieures de pression est donc $\mathcal{P}_{p,ext} = D_m(p_1/\rho_1 - p_2/\rho_2)$.
— Les forces de viscosité s'exerçant sur les frontières du système $\mathcal{P}_{v,ext}$.
Les forces intérieures regroupent :
— les forces de pression intérieures qui sont exercées par les particules de fluide les unes sur les autres quand leur volume varie $\mathcal{P}_{p,int}$
— les forces de viscosité intérieures exercées elles aussi par les particules de fluide les unes sur les autres $\mathcal{P}_{v,int}$
Si de plus, l'écoulement est incompressible et parfait, on a :

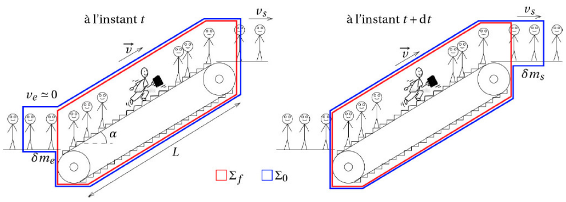
$$D_m\left(\frac{1}{2}v_s^2 - \frac{1}{2}v_e^2\right) = D_m g(z_1 -_2) + D_m\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)$$

Il ne manque plus alors que la condition d'écoulement homogène pour pouvoir appliquer le théorème de Bernoulli, qui indique $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, et l'on retrouve bien la relation de Bernoulli.

On peut rajouter une Puissance utile, en plus de tout ça ! ! Voir exercice juste en dessous...

3) Application : escalator

Un escalator de longueur $L = 30$ m, incliné d'un angle $\alpha = 30°$ avance à la vitesse $v = 5$ km.h^{-1} et permet à 50 personnes par minute (de masse moyenne 70 kg) de gravir un étage d'un magasin. On admet que les personnes transportées arrivent avec une vitesse négligeable sur le tapis roulant. Quelle est la puissance minimale du moteur de l'escalator ?



4) Application Cycliste du Tour de France