Problème 1 : Dimensionnement d'un barrage plan

1 Le volume contenu dans la retenue est très supérieur à tous les autres, on peut donc négliger les variations de hauteur d'eau et considérer la retenue en équilibre hydrostatique.

2 D'après la relation de la statique des fluides,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \qquad \text{d'où} \qquad \int_{P_0}^{P(z)} dP = -\rho g \int_{z_e+H}^{z} dz$$

en utilisant la condition limite au niveau de la surface libre en $z = z_e + H$. Ainsi,

$$\boxed{P(z) = P_0 + \rho g(z_e + H - z)\,.}$$

3 En chaque point du barrage, la force élémentaire est dirigée selon $\vec{e}_x$, d'où

$$\begin{aligned}
\vec{F}_p &= \iint_{\text{barrage}} P(z)\,dS\,\vec{e}_x \\
&= \iint [P_0 + \rho g(z_e + H - z)]\,dy\,dz\,\vec{e}_x \\
&= \int_0^L dy \times \int_{z_e}^{z_e+H} [P_0 + \rho g(z_e + H - z)]\,dz \times \vec{e}_x \\
&= L\left[P_0 z + \rho g(z_e + H)z - \rho g\frac{z^2}{2}\right]_{z_e}^{z_e+H} \vec{e}_x \\
&= L\,(P_0 + \rho g(z_e + H))\,H - L\frac{\rho g}{2}\left((z_e + H)^2 - {z_e}^2\right) \\
&= (P_0 + \rho g(z_e + H))\,HL - \frac{\rho g}{2}\left(H^2 + 2z_e H\right)L \\
\vec{F}_p &= \left(P_0 + \rho g\frac{H}{2}\right) HL\vec{e}_x\,.
\end{aligned}$$

> *Poser le changement de variable $z' = z_e + H - z$ permet de mener le calcul plus rapidement et efficacement.*

4 Le barrage a un volume $HdL/2$, d'où un poids

$$\boxed{\vec{P} = \rho' \frac{HLd}{2}\vec{g}\,.}$$

5 La condition s'écrit

$$\left(P_0 + \rho g\frac{H}{2}\right) HL < \frac{3}{4}\rho' \frac{HLd}{2} g$$

ce qui conduit à

$$\boxed{d > \frac{8}{3\rho' g}\left(P_0 + \rho g\frac{H}{2}\right) = 70\,\text{m}\,.}$$

Problème 2 : Chute libre !

On considère un point matériel de masse m, laché sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur. Il démarre une trajectoire le long de l'axe vertical z (orienté vers le haut). Il est soumis à son poids et à une force de frottement fluide à haut Reynolds ($R_e \gg 1$).

Pour contextualiser l'exercice, on peut penser à un parachutiste en phase de "chute libre" (c'est-à-dire lorsque le parachute n'a pas encore été ouvert) dans l'atmosphère.

1. $R_e = \frac{Lv}{\nu} = \frac{1.200}{3{,}6.1.10^{-5}} \approx 10^7 \gg 10^3$ ce qui confirme l'utilisation de la force de traînée quadratique.
2. BAME : poids, force de traînée. (poussée d'Archimède négligée dans l'air).

   On applique le PFD au point matériel, projeté sur l'axe vertical ascendant :

$$-m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg + \frac{1}{2}\rho S C_x v^2$$

3. La vitesse limite atteinte en régime permanent peut-être simplement déterminée en imposant $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, soit

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x}}$$

4. Pour l'ED complête, on sépare les variables :

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{1}{2}\rho S C_x v^2} = \mathrm{d}t$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}v}{1 - \frac{1}{2g}\rho S C_x v^2} = g\mathrm{d}t$$

si on pose $u^2 = \frac{1}{2g}\rho S C_x v^2$, $\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{1}{2g}\rho S C_x}\mathrm{d}v$ et on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = g.\sqrt{\frac{1}{2g}\rho S C_x}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{1}{2}\rho g S C_x}\mathrm{d}t$$

On intègre de $t = 0$ à t ($v(0) = 0$) :

$$\mathrm{argth}(u) = \sqrt{\frac{1}{2}\rho g S C_x}.t$$

soit

$$u = v.\sqrt{\frac{1}{2g}\rho S C_x} = \mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\rho g S C_x}.t\right)$$