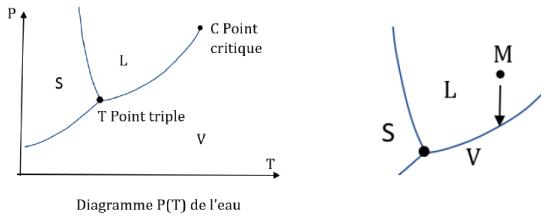
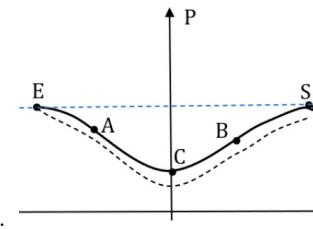


### Problème 1 - Quelques aspects de la physique des sous-marins

- Démo voir cours :  $\vec{F}_v = -\overrightarrow{\text{grad}}P$
- $\vec{f}_v = \rho_0 \vec{g}$  soit  $\rho_0 \vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}P$
- Pour l'axe  $Oz$  vertical orienté vers le bas (à imposer soi-même... mais à imposer tout de même) et l'origine O au niveau de la surface, on trouve par intégration :  $P(z) = P_0 + \rho_0 g z$ .
- Poussée d'Archimède :  $\vec{\Pi}_A = -\rho_0 \pi R^2 L g \vec{e}_z$ . C'est la résultante des forces de pression sur le sous-marin modélisé ici en cylindre.
- Les ballasts (figure 3) sont des cavités situées principalement entre les coques épaisse et mince. Ils peuvent être plus ou moins remplis d'eau ou d'air, faisant ainsi varier le volume du sous-marin et donc la poussée d'Archimède qui compensera plus ou moins le poids du submersible. Sur les surfaces interne et externe de la coque mince (fig 3), les forces de pression de l'eau se compensent ; par contre, la coque épaisse est soumise à la pression de l'eau à l'extérieur et à la pression atmosphérique à l'intérieur, elle doit donc pouvoir supporter cette différence de pression.
- $\Delta p = p(z_C) - P_0 \approx 29.10^5 \text{ Pa}$ .
- $\Delta p_{\text{énoncé}} = \frac{mg}{S} = 98.10^7 \text{ Pa} > \Delta p$  donc tout va bien, le sous-marin n'implose pas. (autre réponse possible :  $\Delta p = \frac{mg}{S}$  soit  $m = 0,3 \text{ kg}$  qui est bien inférieur à 100 kg).
- Ecoulement incompressible, conservation du débit de volume :  $v_1 S_1 = v_2 S_2$
- Conditions d'application du théorème de Bernoulli : l'écoulement est parfait, stationnaire, homogène et incompressible. Sur la ligne de courant entre les points E et C, on a :  $\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{P(E)}{\rho_0} + g z_E = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{P(C)}{\rho_0} + g z_C$  D'après la question 6.,  $v_1 S_1 = v_2 S_2$  et comme  $z_E = z_C$  on trouve alors :  $P(C) - P(E) = \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2 \left( 1 - \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right)$



Or  $S_1 > S_2$  donc  $P(C) < P(E)$ . Entre les points E et C, la pression diminue ; un point M de cette ligne de courant, pour une température donnée, verra sa pression diminuer jusqu'à éventuellement la pression de vapeur saturante  $P_{\text{sat}}(T)$  ou une bulle de vapeur peut se former. Les bulles apparaissent donc en C (au niveau du pincement).



- Pour une profondeur donnée,  $P(A) = P(B)$  mais  $P_{\text{sat}}(T_A) < P_{\text{sat}}(T_B)$  donc la cavitation est plus difficile en A qu'en B : le sous-marin est plus discret en eau froide qu'en eau chaude ( $T_A < T_B$ ).
- H : haut de l'hélice, B bas de l'hélice.  $P(H) < P(B)$  pour une température donnée, donc les bulles de cavitation apparaissent plus facilement en haut qu'en bas de l'hélice du sous marin.
- Conservation de la masse :  $\text{div}(\rho_0 \vec{v}) + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ . L'écoulement est incompressible donc  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ . L'imperméabilité de la paroi de la bulle de rayon  $R(t)$  permet d'écrire :  $v(R(t), t) = \dot{R}(t)$ .
- L'énoncé fournit l'expression de "div", donc l'incompressibilité conduit à  $r^2 v(r, t) = f(t) = R^2(t) \dot{R}(t)$ , soit  $v(r, t) = \frac{R^2(t) \dot{R}(t)}{r^2} = -\frac{\dot{A}(t)}{r^2}$
- L'équation d'Euler simplifiée (projection) donne :  $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_0 v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$ , soit  $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_0 \left( \frac{\dot{A}}{r^2} + \frac{2\dot{A}^2}{r^5} \right)$
- La durée  $\tau$  est telle que pendant l'implosion  $R(t)$  passe de  $R_0$  à 0. En posant  $K = \sqrt{\frac{3\rho_0}{2(p_{\infty,0} - p_{\text{sat}}(T))}}$  et en utilisant la relation de l'énoncé :

$$\tau = \int_0^\tau dt = -K \int_{R_0}^0 \frac{dR}{\left[ \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} = -K \int_{R_0}^0 \sqrt{\frac{\left( \frac{R}{R_0} \right)^3}{1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^3}} dR$$

On pose  $u = \frac{R}{R_0}$  ainsi  $\tau = K R_0 J$  d'où le résultat.

AN :  $\tau = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ s} \ll 0,2 \text{ s}$  durée typique d'évolution d'une bulle de champagne par exemple. Le phénomène étudié ici est beaucoup plus rapide.

## Problème 2 - De la Physique de l'aéronef

### 1) Mécanique du vol

1. Une ligne de courant est la courbe telle qu'en chacun de ses points la particule de fluide coïncidente à une **vitesse tangente à la ligne**. C'est un **point de vue eulérien** comme une photo instantanée (différent de la trajectoire d'une particule).

2. Considérons deux lignes de courants infiniment grandes ( $A_\infty, A$ ) et ( $B_\infty, B$ ).

Les lignes de courant étant plus resserrées en  $A$  qu'en  $B$ , cela signifie que la vitesse y est plus grande (conséquence de  $\text{div} \vec{v} = 0$  pour un écoulement incompressible).

Par ailleurs, l'écoulement étant supposé stationnaire de l'air supposé parfait, homogène et incompressible, en utilisant le **théorème de BERNOULLI** à un écoulement rotationnel, en négligeant les différences d'altitude, sur chacune des lignes de courant :

$$P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} \text{ et } P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} = P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} \text{ donc } P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = P_B + \rho \frac{v_B^2}{2}$$

Sachant que  $v_A > v_B$ , on peut alors conclure que  $P_A < P_B$  et cette dépression va générer une force de portance.

3. D'après l'expression précédente  $P_{\text{extrados}} < P_{\text{intrados}}$  donc en utilisant l'expression des coefficients de pression :  $C_{P1} = C_{P\text{intrados}} > C_{P2} = C_{P\text{extrados}}$

4. En reprenant le théorème de BERNOULLI :

$$P + \rho \frac{v^2}{2} = P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} \Rightarrow P - P_\infty = \rho \frac{v_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{v^2}{v_\infty^2}\right) \Rightarrow C_P = \frac{P - P_\infty}{\rho \frac{v_\infty^2}{2}} = 1 - \frac{v^2}{v_\infty^2} \leq 1$$

5. On rappelle qu'une force est une masse multipliée par une accélération (PFD). Par conséquent :

$$[C_x] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2 \cdot M \cdot L^{-3} \cdot (L \cdot T^{-1})^2} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{M \cdot L \cdot T^{-2}} = 1$$

Le coefficient de portance est bien adimensionné.

6. Pour un angle d'incidence de  $6^\circ$ , les écarts entre les coefficients de pression de l'intrados et de l'extrados sont plus grands (courbes en pointillés) que pour  $2^\circ$ . D'après les expressions des coefficients de pression, on peut en déduire que les écarts entre les pressions sont supérieurs et donc que la portance est supérieure. En conclusion, le coefficient de portance est supérieur pour une incidence de  $6^\circ$ .

### 2) Instrumentation : tube de Pitot

7. La ligne de courant qui aboutit en  $F$  se termine en ce point qui est un point d'arrêt par symétrie (le fluide est au repos dans le tube). Celle qui passe en  $G$  est en fait très peu perturbée depuis l'infini car le tube est très fin.

8. Les conditions sont réunies pour appliquer le théorème de BERNOULLI le long d'une ligne de courant, en négligeant les effets de pesanteur. On suit alors les 2 lignes de courant précédentes.

Entre l'infini et  $F$ , on peut écrire :  $P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} = P_F + \rho \frac{v_F^2}{2}$  or  $v_F = 0$  donc  $P_F = P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2}$ .

Entre l'infini et  $G$ , on obtient :  $P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} = P_G + \rho \frac{v_G^2}{2}$ . Or la ligne de courant passant par  $G$  est peu perturbée par le tube donc  $v_G \approx v_\infty$  et donc  $P_G \approx P_\infty$ .

9. Le liquide dans le tube est à l'équilibre. On peut donc utiliser la statique des fluides :  $P_{\text{inf}} = P_{\text{sup}} + \rho g \Delta z$ , ce qui donne ici :  $P_H - P_I = \rho g h$ .

10. Si on néglige les effets de pesanteur sur l'air, on peut écrire :  $P_H \approx P_F$  et  $P_I \approx P_G = P_\infty$ . On injecte dans la relation précédente :

$$P_\infty + \rho_\infty \frac{v_\infty^2}{2} - P_\infty = \rho g h \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{2 \rho g h}{\rho_\infty}}$$

Lorsque la vitesse de l'air augmente,  $h$  augmente.

### 3) Force de propulsion

11. Le système  $\Sigma^*$  est constitué à l'instant  $t$  de l'air contenu dans le turboréacteur et de la masse entrante. Par extensivité de la quantité de mouvement, on a  $\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t) + \delta m_e \vec{v}_e$ .

12. De même,  $\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}(t + dt) + \delta m_s \vec{v}_s$ .

13. En régime stationnaire,  $\delta m_e = \delta m_s = D_m dt$ . De plus,  $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}(t)$  car il s'agit d'une grandeur eulérienne (associée à un système immobile), donc constante en régime stationnaire par définition. On a donc après simplification :

$$\frac{d\vec{p}^*(t)}{dt} = \frac{\vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

14. Le fluide dans le turboréacteur est soumis à :

- la pesanteur (négligée)
- les forces de pression
- l'action du moteur sur l'air, notée  $\vec{F}_{avion \rightarrow air}$

15. La pesanteur est explicitement négligée dans l'énoncé.

De plus, les forces de pression s'appliquent à l'entrée et à la sortie du turboréacteur (pas sur les côtés où c'est le métal qui est au contact du fluide en écoulement, donc l'avion : cette action est comptée dans la 3e force du bilan). Ces forces de pressions peuvent s'écrire  $\vec{F}_p = (S_{entrée} - S_{sortie})P_0 \vec{u}_x$ . Il semble qu'elles soient dans la suite négligées : soit parce que les deux surfaces sont sensiblement les mêmes, soit parce que la pression atmosphérique est relativement faible et n'a que peu d'influence ici.

Si on applique le théorème de la quantité de mouvement (PFD) au système fermé  $\Sigma^*$ , on obtient bien  $\vec{F}_{avion \rightarrow air} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e)$ .

16. D'après le principe des actions réciproques,  $\vec{F}_{air \rightarrow avion} = -\vec{F}_{avion \rightarrow air} = D_m(\vec{v}_e - \vec{v}_s)$ .

$\vec{v}_s$  et  $\vec{v}_e$  sont orientées vers l'arrière, et on veut une force propulsive vers l'avant, donc il faut donc que  $v_s > v_e$ .

### Problème 3 - L'avion SolarStratos (d'après e3a)

1.  $g(z_0) = 9,73 \text{ m.s}^{-2}$  et  $g(z_1) = 9,72 \text{ m.s}^{-2}$

2. Ces valeurs sont très proches, donc on peut considérer que le champ de pesanteur est uniforme à ces altitudes avec une incertitude de  $0,01 \text{ m.s}^{-2}$ .

3. D'après la loi fondamentale de l'hydrostatique,  $\overrightarrow{\text{grad}}P = \mu \vec{g}$ , soit  $\frac{dP}{dz} = -\mu g$

4. D'après la loi des gaz parfaits, on a  $PV = nRT$ , donc  $\mu = \frac{m}{V} = \frac{nM_{air}}{V} = \frac{PM_{air}}{RT}$ .

On en déduit que  $\frac{dP}{dz} = -\frac{PM_{air}g}{RT}g$ .

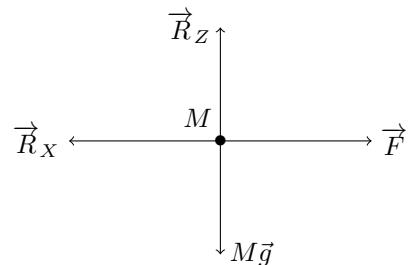
On intègre en séparant les variables :  $\frac{dP}{P} = -\frac{M_{air}g}{R(T_0 + a(z - z_0))}dz$

$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{M_{air}g}{Ra} \ln\left(\frac{T_0 + a(z - z_0)}{T_0}\right)$

On en déduit que  $P(z) = P_0 \left(1 + \frac{a}{T_0}(z - z_0)\right)^{-\frac{M_{air}g}{Ra}}$ , soit  $b = \frac{a}{T_0}$  et  $\alpha = -\frac{M_{air}g}{Ra}$

5. On a  $\mu(z_1) = \frac{P_0 M_{air}}{RT_0} \left(1 + \frac{a}{T_0}(z_1 - z_0)\right)^{-\frac{M_{air}g}{Ra}}$ , soit  $\mu(z_1) = 4,10^{-2} \text{ kg.m}^{-3}$

La valeur obtenue est du même ordre de grandeur mais plus faible que la valeur réelle.



L'avion est soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre, à la force

6. de traînée et la force de portance, ainsi qu'à une force de propulsion  $\vec{F}$ .

7. On a  $[C_x] = \frac{[R_X]}{[\mu_1 v^2 S]}$ , donc  $[C_x] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{M \cdot L^{-3} \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot L^2} = 1$ .

$C_x$  et  $C_z$  sont donc des coefficients sans dimension.

8. On applique le PFD à l'avion de masse  $M$  dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\begin{cases} M \frac{dv_x}{dt} = F - R_X \\ M \frac{dv_z}{dt} = R_Z - Mg \end{cases}$$

9. Lorsque l'avion est à sa vitesse de croisière,  $\frac{dv_z}{dt} = 0$ , donc  $\frac{1}{2} \mu_1 C_z v_c^2 S = Mg$ , soit  $v_c = \sqrt{\frac{2Mg}{\mu_1 C_z S}} = 69 \text{ m.s}^{-1}$

10. On a également  $\frac{dv_x}{dt} = 0$ , soit 
$$F = \frac{1}{2}\mu_1 C_x v_c^2 S = 79 \text{ N}$$

On en déduit la puissance 
$$\mathcal{P} = F \cdot v_c = 5,5 \text{ kW}$$

11. Le rendement du moteur électrique étant de 90%, l'avion doit disposer d'une puissance électrique de 6,1 kW. Le rendement des panneaux photovoltaïques est lui de 24%, donc les panneaux solaires doivent recevoir une puissance lumineuse de 25 kW, ce qui correspond à une surface de 21 m<sup>2</sup>. Les panneaux de l'avion ayant une surface de 22 m<sup>2</sup>, ses concepteurs ont pris un tout petit peu de marge par rapport à la puissance nécessaire pour aller à la vitesse de croisière.