

**Problème 1 - QCM (d'après ENAC)****1) Électrocinétique des régimes transitoires**

1. A)
2. C)
3. D)
4. A)
5. C)
6. B)

**2) Régime sinusoïdal forcé établi**

7. C)
8. A)
9. B)
10. D)
11. A)
12. C)

**Problème 2 - Igloo(d'après CCINP)**

1. L'existence d'une inhomogénéité spatiale de température engendre un courant thermique s'opposant à cette inhomogénéité, et proportionnel au gradient de température avec une constante de proportionnalité  $\lambda$  appelée conductivité thermique propre à un matériau. Ceci se résume sous l'écriture suivante de la loi de Fourier :

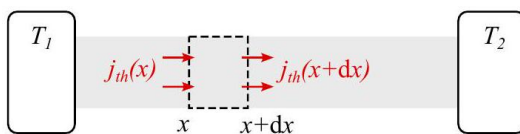
$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (1)$$

2. On effectue un bilan thermique entre les instants  $t$  et  $t + dt$  sur une tranche de matériau comprise entre  $x$  et  $x + dx$  :  
— la variation d'énergie interne est :

$$U(t + dt) - U(t) = dU = C dT = mc dT = (\rho \times S dx)c dT$$

- le flux thermique (entrant et sortant par les faces de section  $S$ ) est :

$$\phi_{th} dt = +j_{th}(x, t) \times S dt - j_{th}(x + dx, t) \times S dx$$



Ce qui donne le bilan suivant :

$$\begin{aligned} dU &= \phi_{th} dt \\ \rho S dx c dT &= (j_{th}(x, t) - j_{th}(x + dx, t)) S dt \\ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} \end{aligned}$$

puis en utilisant la loi de Fourier à une dimension :  $j_{th}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{équation de la diffusion de la chaleur} \quad (2)$$

3. Les unités des différents termes sont :

- $\rho$  en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $c$  en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $L$  en  $\text{m}$
- $\lambda$  en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  (à retrouver avec la loi de Fourier ou avec la légende de la figure 4)

On en déduit que comme attendu par la notation :  $\tau = \frac{\rho c L^2}{\lambda}$  est un temps en second (s). Il représente le temps caractéristique de diffusion thermique sur la longueur  $L$  du matériau et peut être retrouvé en faisant une analyse d'ordre de grandeur dans l'équation de la chaleur.

4. Le phénomène de diffusion thermique est un phénomène irréversible. Ceci peut être vu comme la non-invariance de l'équation de la diffusion par inversion du temps :  $t' \mapsto -t$ .
5. En régime stationnaire, l'équation se résume à :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

donc  $T(x) = Ax + B$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  deux constantes à déterminer. On utilise alors les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_1 = A \times 0 + B \\ T(x=L) = T_2 = A \times L + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = T_1 \\ A = \frac{T_2 - T_1}{L} \end{cases}$$

donc :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x \quad (3)$$

6. Le flux thermique total à travers la section  $S$  est :

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = \iint_S -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} S \\ \phi_{12} &= \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Le flux thermique total est directement proportionnel à la différence de température.

7. On peut alors faire apparaître la résistance thermique par analogie avec la loi d'Ohm donnée par l'énoncé et identifier  $R_{th}$ .

$$T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{12} \quad (5)$$

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S} \quad (6)$$

8. L'analogie avec l'électrocinétique est la suivante :

Grandeurs	Électrocinétique	Thermique
Différence de potentiel	$V_1 - V_2$	$T_1 - T_2$
Résistance	$R$	$R_{th}$
Flux	$I$	$\phi_{12}$
Conductivité	$\gamma$	$\lambda$

9. Le transfert conducto-convectif se traduit par un flux thermique suivant la loi de Newton. Par une analogie directe, on peut l'écrire comme une loi d'Ohm thermique et identifier la résistance thermique.

$$\phi_{sf} = h (T_s - T_f) S' \Leftrightarrow T_s - T_f = \frac{1}{hS'} \phi_{sf}$$

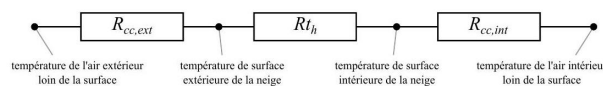
donc

$$R_{cc} = \frac{1}{hS'} \quad (7)$$

10. Dans les expressions précédentes comme dans l'expression donnée ici, la résistance thermique est inversement proportionnelle à la conductivité thermique :  $R_{th} \propto \frac{1}{\lambda}$ . On observe sur le graphique que la conductivité thermique  $\lambda$  augmente avec la masse volumique  $\rho$  de la neige. Donc si la neige est plus tassée, sa masse volumique augmente, ce qui augmente sa conductivité thermique et diminue alors sa résistance thermique : l'igloo est moins bien isolé. Il est donc préférable de ne pas tasser les blocs de neige pour avoir un igloo mieux isolé.

11. Pour  $\rho = 200 \text{ kg.m}^{-3}$ , on lit sur le graphique :  $\lambda \simeq 0,14 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . La résistance thermique est alors de  $R_{th} \simeq 0,13 \text{ K.W}^{-1}$ .

12. Le modèle adapté pour modéliser les phénomènes de conduction et de conducto-convection ici est celui des résistances en série. En effet, les différents phénomènes se font "en série" / "à la suite" par différentes couches de transfert thermique, et avec des températures de bord différentes qui ne pourraient correspondre à un modèle en dérivation.



13. La résistance thermique équivalente est donc :

$$R_{igloo} = R_{CC, int} + R_{th} + R_{CC, ext} = \frac{1}{h_i S_i} + \frac{L}{2\pi\lambda L (r_i + L)} + \frac{1}{h_e S_e}$$

avec les surfaces des hémisphères :  $S_i = 2\pi r_i^2$  et  $S_e = 2\pi (r_i + L)^2$

$$R_{igloo} = \frac{1}{2\pi h_i r_i^2} + \frac{L}{2\pi\lambda L (r_i + L)} + \frac{1}{2\pi h_e (r_i + L)^2} \quad (8)$$

14. Cette modélisation ne tient pas compte du rayonnement thermique. Ce mode de transfert se fait dans les milieux transparents (ici l'air) sans support matériel, donc en parallèle de la convection. La résistance thermique associée devrait donc être placée en parallèle de celles de la conducto-convection (et donc augmenter effectivement le flux thermique total).
15. On mène les calculs comme en électronique en s'appuyant sur l'analogie précédente (avec ici un générateur de "courant thermique"  $\gg P$ ). On part ici d'une loi des nœuds :

$$\begin{aligned}
 P &= P_{\text{igloo}} + P_{\text{sol}} \\
 &= \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{igloo}}} + \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{sol}}}{R_{\text{sol}}} \\
 \Leftrightarrow R_{\text{igloo}} R_{\text{sol}} P &= (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}) R_{\text{sol}} + (T_{\text{int}} - T_{\text{sol}}) R_{\text{igloo}} \\
 \Leftrightarrow T_{\text{int}} (R_{\text{sol}} - R_{\text{igloo}}) &= R_{\text{igloo}} R_{\text{sol}} P + T_{\text{ext}} R_{\text{sol}} + T_{\text{sol}} R_{\text{igloo}} \\
 T_{\text{int}} &= \frac{P R_{\text{igloo}} R_{\text{sol}} + T_{\text{ext}} R_{\text{sol}} + T_{\text{sol}} R_{\text{igloo}}}{R_{\text{igloo}} + R_{\text{sol}}} \quad (9)
 \end{aligned}$$

16. La puissance surfacique dégagée est  $P$ ; il faut estimer la surface d'une personne, de l'ordre de  $1 \text{ m}^2$ , ce qui donne le bon ord.
17. Application numérique avec des températures à convertir évidemment en K :  $T_{\text{int}} \simeq 275 \text{ K} = 2^\circ\text{C}$
18. Si on suppose que la résistance thermique augmente de moitié :  $R'_{\text{igloo}} = 1,5 \times R_{\text{igloo}} = 0,22 \text{ K.W}^{-1}$ , on obtient :  $T'_{\text{int}} \simeq 292 \text{ K} = 19^\circ\text{C}$ .  
On gagne effectivement une vingtaine de degrés comme annoncé dans le texte.

### Problème 3 - L'effet de serre atmosphérique

On considère que le soleil se comporte comme un corps noir à la température  $T_S$  et que la terre se comporte comme un corps noir à la température  $T_0$ .

- Sans tenir compte de l'atmosphère
  - $P_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$
  - $P_{S,T} = P_S \cdot \frac{\pi R_T^2}{4\pi d_{T-S}^2} = \pi \frac{R_S^2 R_T^2}{d_{T-S}^2} \sigma T_S^4$
  - En l'absence d'atmosphère, toute la puissance reçue de la part du Soleil est réémise, soit  $P_{S,T} = 4\pi R_{e1}^2 \cdot \sigma T_{e1}^4$  avec  $T_S$  donnée par la loi de Wien.
- En tenant compte de l'atmosphère et de l'albédo
  - Bilan radiatif avec atmosphère sans albédo :  $\varphi_S + \varphi_a = \varphi_T$  et  $2\varphi_a = \varphi_T$ , soit  $\varphi_S = \varphi_a = \frac{\varphi_T}{2}$ ; et  $T_{e1} = T_S \cdot \left( \frac{R_S^2}{2d_{T-S}^2} \right)^{1/4} = 332 \text{ K}$
  - Avec albédo, on trouve (cours) :  $T_{e2} = 303 \text{ K}$ , plus réaliste
- Amélioration du modèle
  - On peut améliorer le modèle en considérant que l'atmosphère n'est pas entièrement transparente au rayonnement solaire. L'atmosphère absorbe une fraction  $\alpha$  et la Terre une fraction  $1-\alpha$  du rayonnement solaire :  
D'où le bilan :  $(1-\alpha)\varphi_S + \varphi_a = \varphi_T$  (Terre) et  $2\varphi_a = \varphi_T + \alpha\varphi_S$  (atmosphère)
  - Le méthane et les CFC sont particulièrement efficaces pour l'effet de serre car leur bande d'absorption correspond à une fenêtre atmosphérique où normalement la terre rayonne de l'énergie vers l'espace. Les activités humaines produisent une grande partie du méthane et des CFC de l'atmosphère. Il faut donc en limiter les rejets.