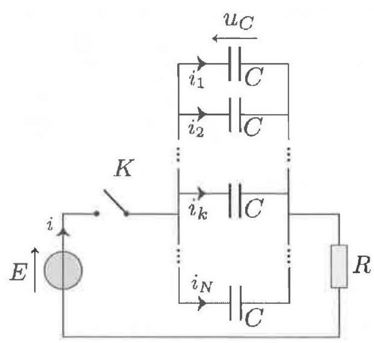
Tout résultat d'un calcul devra présenter le bon nombre de chiffres significatifs. La notation tiendra largement compte du soin apporté à la rédaction. $\boxed{\textit{Encadrer}}$ *les résultats.* **Les trois problèmes sont à réaliser sur des copies différentes.**

Problème 1 - QCM (d'après ENAC)

1) Électrocinétique des régimes transitoires

On associe, en dérivation, N condensateurs identiques de capacités C. Le dipôle obtenu est alors monté en série avec un résistor de résistance R, un générateur de tension continue de force électromotrice (tension) E, et un interrupteur K que l'on ferme à un instant pris comme origine temporelle ($t = 0$). On note i l'intensité du courant électrique débité par le générateur et i_k, k allant de 1 à N, l'intensité du courant électrique dans le k ième condensateur (Fig. ci-après). On désigne u_C la tension aux bornes des condensateurs. Avant la fermeture de $K(t < 0)$: $u_C(t) = U_0$, oÃź U_0 est la tension de charge des condensateurs.



1. Que vaut l'énergie totale $\mathcal{E}_0$ emmagasinée par les condensateurs, avant la fermeture de K ?

   A) $\mathcal{E}_e = \frac{N}{2}CU_0^2$, B) $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}CU_0^2$, C) $\mathcal{E}_e = 0$, D) $\mathcal{E}_e = \frac{CU_0^2}{2N}$

2. Que peut-on affirmer lorsque $t > 0$?

   A) $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ avec $\tau = \frac{RC}{N}$, C) $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ avec $\tau = NRC$
   B) $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ avec $\tau = \frac{RC}{N^{1/2}}$, D) $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = 0$ avec $\tau = NRC$

3. Comment évolue $u_C(t)$ après fermeture de K ?

   A) $u_C(t) = E - E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, C) $u_C(t) = E + U_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
   B) $u_C(t) = (U_0 - E)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, D) $u_C(t) = E + (U_0 - E)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

4. Que peut-on affirmer lorsque $t > 0$?

   A) $\frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i_k(t)}{\tau'} = 0$ avec $\tau' = NRC$, C) $\frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i_k(t)}{\tau'} = \frac{E}{R}$ avec $\tau' = RC$
   B) $\frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i_k(t)}{\tau'} = 0$ avec $\tau' = RC$, D) $\frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i_k(t)}{\tau'} = \frac{E}{R}$ avec $\tau' = \frac{RC}{N}$

5. Quel est le courant $i\left(0^+\right)$débité par le générateur en $t = 0^+$?

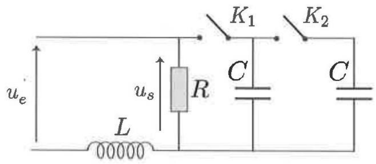
   A) $i\left(0^+\right) = \frac{E}{R}$, B) $i\left(0^+\right) = \frac{U_0}{R}$, C) $i\left(0^+\right) = \frac{E-U_0}{R}$, D) $i\left(0^+\right) = \frac{U_0-E}{R}$

6. Comment évolue $i_k(t)$ après fermeture de K ?

   A) $i_k(t) = \frac{E}{NR}\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$, C) $i_k(t) = \frac{U_0}{NR}\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$
   B) $i_k(t) = \frac{E-U_0}{NR}\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$, D) $i_k(t) = \frac{E-U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$

2) Régime sinusoïdal forcé établi

Un filtre composé d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et de deux condensateurs identiques de capacités C, est alimenté par une tension d'entrée sinusoïdale $u_e(t)$, de pulsation ω, et d'amplitude complexe $\underline{u}_{e,m}$. On se place en régime sinusoïdal forcé établi (i.e. permanent) et on prélève la tension de sortie u_s aux bornes du résistor. On désigne par $\underline{u}_{s,m}$ l'amplitude complexe de la tension u_s. Deux interrupteurs K_1 et K_2 permettent de modifier la constitution du circuit (Fig. ci-après). On note $\mathcal{H} = \underline{u}_{s,m}/\underline{u}_{e,m}$ la fonction de transfert du filtre et j, l'unité imaginaire ($j^2 = -1$).



7. K_1 et K_2 étant ouverts, la fonction de transfert se met sous la forme :

$$\mathcal{H} = \frac{a + jbw}{1 + jw} \quad \text{avec} \quad w = \frac{\omega}{\omega_0}$$

où a, b et ω_0 sont des constantes indépendantes de ω. Que peut-on affirmer ?

A) $a = 0$ et $b = 1$ et $\omega_0 = R/L$, C) $a = 1$ et $b = 0$ et $\omega_0 = R/L$
B) $a = 0$ et $b = 1$ et $\omega_0 = L/R$, D) $a = 1$ et $b = 0$ et $\omega_0 = L/R$

8. K_1 est fermé et K_2 ouvert. En notant ω_1 et Q_1 deux constantes positives indépendantes de ω, et si $w_1 = \frac{\omega}{\omega_1}$, comment peut s'écrire la nouvelle expression $\mathcal{H}$ de la fonction de transfert ?

A) $\mathcal{H} = \frac{1}{1+j\frac{w_1}{Q_1}-w_1^2}$, C) $\mathcal{H} = \frac{-w_1^2}{1+j\frac{w_1}{Q_1}-w_1^2}$
B) $\mathcal{H} = \frac{jw_1/Q_1}{1+j\frac{w_1}{Q_1}-w_1^2}$, D) $\mathcal{H} = \frac{1-w_1^2}{1+j\frac{w_1}{Q_1}-w_1^2}$

9. Exprimer ω_1 :

A) $\omega_1 = (LC)^{1/2}$, B) $\omega_1 = (LC)^{-1/2}$, C) $\omega_1 = \frac{R}{L}$, D) $\omega_1 = \frac{1}{RC}$

10. Exprimer Q_1 :

A) $Q_1 = R\left(\frac{L}{C}\right)^{1/2}$, B) $Q_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{L}{C}\right)^{1/2}$, C) $Q_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{C}{L}\right)^{1/2}$, D) $Q_1 = R\left(\frac{C}{L}\right)^{1/2}$

11. K_1 et K_2 sont tous les deux fermés. Si Q_2 et ω_2 sont deux constantes indépendantes de ω, et si $w_2 = \frac{\omega}{\omega_2}$, que devient $\mathcal{H}$?

A) $\mathcal{H} = \frac{1}{1+j\frac{w_2}{Q_2}-w_2^2}$ C) $\mathcal{H} = \frac{-w_2^2}{1+j\frac{w_2}{Q_2}-w_2^2}$
B) $\mathcal{H} = \frac{jw_2/Q_2}{1+j\frac{w_2}{Q_2}-w_2^2}$, D) $\mathcal{H} = \frac{1-w_2^2}{1+j\frac{w_2}{Q_2}-w_2^2}$

12. Exprimer Q_2 :

A) $Q_2 = \frac{Q_1}{\sqrt{2}}$, B) $Q_2 = Q_1$, C) $Q_2 = \sqrt{2}Q_1$, D) $Q_2 = 2Q_1$

Problème 2 - Igloo(d'après CCINP)

Les habitants des régions polaires savent qu'un abri constitué de neige (quinzee, hutte, abri sous arbre, trou à neige, igloo, etc.) offre un rempart efficace contre le froid. Nous allons nous intéresser ici au cas de l'igloo (figure 1).

Figure 1 – Igloo

1) Généralités

On considère un matériau solide de section S, de longueur L, calorifugé latéralement et placé au contact parfait de deux sources de températures constantes T_1 et T_2 (figure 2). On note $T(x,t)$ la température d'une section d'abscisse X du matériau.

Le matériau est caractérisé par sa masse volumique ρ, sa capacité thermique massique c et sa conductivité thermique λ.

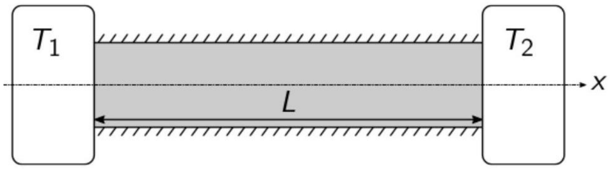


FIGURE 2 – Matériau au contact de deux sources

a) Régime variable

1. Donner une interprétation physique à la loi de Fourier exprimant le vecteur densité volumique de courant thermique selon :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T).$$

2. Montrer, à l'aide d'un bilan thermique infinitésimal unidimensionnel, que la température satisfait à l'équation différentielle :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

3. Déterminer l'unité de la grandeur $\tau = \frac{\rho c L^2}{\lambda}$ et préciser sa signification concrête.
4. Le phénomène de diffusion thermique peut-il être un processus réversible ? Justifier.

b) Régime stationnaire

On se place en régime stationnaire. On note $\Phi_{12} = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \overrightarrow{dS}$ le flux thermique traversant la section S du solide, de la zone de tempÃľrature T_1 vers celle de température T_2. On appelle résistance thermique conductive R_{th} la grandeur satisfaisant la loi d'Ohm thermique :

$$T_1 - T_2 = R_{\text{th}} \Phi_{12}.$$

5. Donner l'équation différentielle satisfaite par la température en régime stationnaire et en déduire l'expression de $T(x)$ en fonction de x, T_1, T_2 et de L.
6. Déterminer l'expression littérale de Φ_{12}. Que constate-t-on ?
7. Montrer que la résistance thermique conductive du matériau vaut $R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$.

On souhaite faire une analogie entre les grandeurs électrocinétique et thermique en régime stationnaire. On note V le potentiel électrique et R la résistance électrique.

8. Reproduire le tableau suivant et le compléter en définissant, si nécessaire, les grandeurs non mentionnées par l'énoncé.

Électrocinétique	Thermique
$V_1 - V_2$	
R	
	Φ_{12}
	λ

Lorsqu'un solide de température de surface T_s et un fluide, dont la température loin du solide est notée T_f, sont en contact par le biais d'une surface d'aire S', on observe un transfert thermique entre le solide et le fluide. Le flux thermique résultant suit la loi de Newton du transfert conducto-convectif $\Phi_{\text{sf}} = h\,(T_s - T_f)\,S'$, où h est appelé coefficient de transfert conducto-convectif.

9. Montrer que la résistance conducto-convective associée à la loi de Newton s'écrit :

$$R_{\text{cc}} = \frac{1}{hS'}.$$

2) Bilan thermique d'un igloo

On modélise un igloo par un hémisphère (une demi-sphère) creux de rayon intérieur $r_i = 1,5$ m, fabriqué à partir de blocs de neige de conductivité thermique λ et d'épaisseur supposée constante et égale à $L = 30$ cm (figure 3).

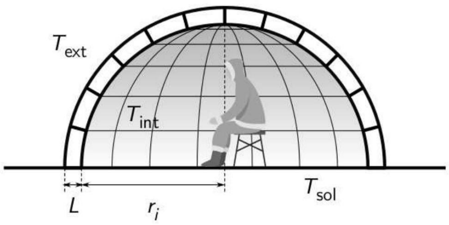


Figure 3 – Vue de l'igloo en coupe

a) Résistance conductive de l'igloo

Une étude expérimentale (figure 4) a permis de mesurer la conductivité thermique λ de la neige en fonction de sa masse volumique ρ.

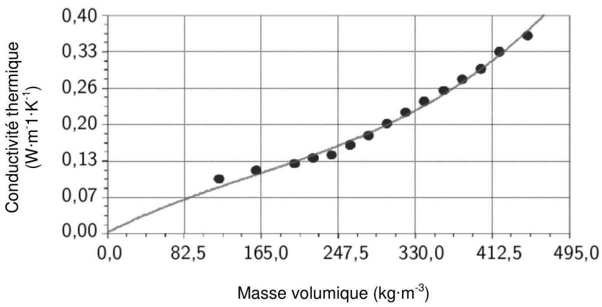


Figure 4 – Conductivité thermique de la neige en fonction de la masse volumique

On note R_{th} la résistance thermique conductive de l'igloo dont l'expression, admise, en géométrie sphérique est :

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{2\pi\lambda r_i\,(r_i + L)}$$

10. À partir de la figure 4, préciser si le fait de bien tasser les blocs de neige améliore ou non l'isolation de l'igloo.
11. Pour une neige de masse volumique $\rho = 20 \cdot 10^1\ \text{kg} \cdot\ \text{m}^{-3}$, estimer la valeur de la conductivité thermique correspondante et calculer la résistance thermique R_{th}.

b) Prise en compte de la conducto-convection

La circulation de l'air provoque de la conducto-convection que l'on prend en compte par le biais de résistances conducto-convectives intérieure $R_{\text{cc, int}} = \frac{1}{h_i S_i}$ et extérieure $R_{\text{cc, ext}} = \frac{1}{h_e S_e}$. Dans ces expressions, h_i et h_e sont les coefficients de transfert conducto-convectifs intérieur et extérieur tandis que S_i et S_e correspondent aux surfaces intérieure et extérieure de l'igloo.
On envisage deux modèles d'association des résistances thermiques précédentes, en parallèle ou en série (figure 5).

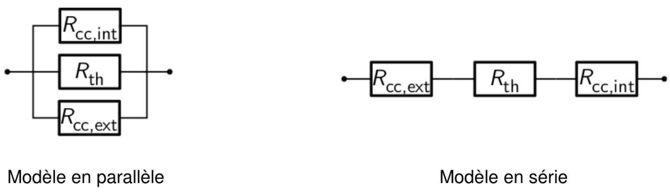


Figure 5 – Circuits équivalents

12. Préciser, en justifiant votre choix, quel modèle convient.
13. Déterminer, pour le modèle choisi, l'expression littérale de la résistance thermique équivalente R_{igloo} en fonction de λ, h_e, h_i, L et de r_i.
14. Cette modélisation ne tient pas compte d'un autre mode de transfert thermique. De quel mode s'agit-il ? Si l'on souhaitait en tenir compte, la résistance thermique associée devrait-elle être placée en série ou en parallèle de celles de conducto-convection ?

c) Température intérieure de l'igloo

Pour étudier le comportement thermique de l'igloo, on propose un modèle électrique analogue représenté sur la figure 6. Ce modèle tient compte du sol sur lequel repose l'igloo et de la puissance thermique dégagée par ses occupants. On note T_{sol} la température du sol, R_{sol} sa résistance thermique et P la puissance thermique dégagée par les occupants de l'igloo qui, du point de vue électrique, est analogue à un générateur de courant. La représentation électrique de l'ensemble est donnée sur la figure 6.

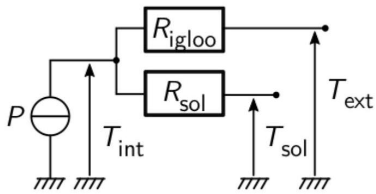


FIGURE 6 – Modèle électrique complet de l'igloo

15. Montrer que la température intérieure de l'igloo vaut :

$$T_{\text{int}} = \frac{PR_{\text{igloo}}R_{\text{sol}} + T_{\text{ext}}R_{\text{sol}} + T_{\text{sol}}R_{\text{igloo}}}{R_{\text{igloo}} + R_{\text{sol}}}.$$

Les personnes se trouvant à l'intérieur de l'igloo dégagent une puissance thermique $P = 30.10^1$ W. La température extérieure vaut $T_{\text{ext}} = -40°\text{C}$, celle du sol vaut $T_{\text{sol}} = -20°\text{C}$, et les résistances thermiques valent $R_{\text{igloo}} = 0,15$ K.W^{-1} et $R_{\text{sol}} = 1,3$ K.W^{-1}.

16. On rappelle la loi de Stefan-Boltmann, qui donne une estimation de la puissance émise par unité de surface d'un corps noir de température T

$$\varphi = \sigma T^4,$$

avec $\sigma = 5,67.10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4}.

En utilisant cette loi, justifier l'ordre de grandeur de la valeur $P = 30.10^1$ W pour la puissance dégagée par une personne.

17. Calculer la température intérieure T_{int} de l'igloo.
18. On peut lire sur la page Wikipedia consacrée aux igloos que "*Dans certains igloos, notamment ceux près du détroit de Davis, l'intérieur est quadrillé de peaux de bêtes : cela permet d'augmenter la température de presque 20* °C." Sachant que, lorsque les parois intérieures de l'igloo sont recouvertes de peaux, la résistance thermique de l'igloo augmente de moitié, estimer la nouvelle température intérieure et conclure.

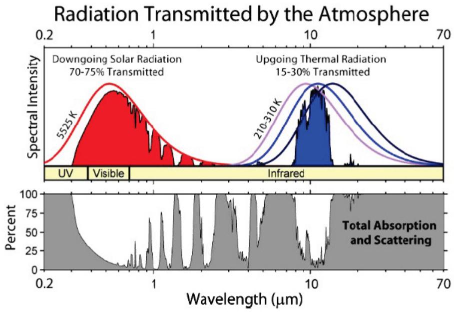
Problème 3 - L'effet de serre atmosphérique

On considère que le soleil se comporte comme un corps noir à la température T_S et que la terre se comporte comme un corps noir à la température T_0.

1. Sans tenir compte de l'atmosphère
   (a) Quelle est l'expression de la puissance totale rayonnée par le Soleil P_S en fonction de σ, T_S et R_S ?
   (b) Quelle est l'expression de la puissance totale reçue par la Terre en fonction de σ, T_S, R_S, R_T et d_{T-S} ?
   (c) Déterminer la température à la surface du Soleil T_S sachant que le maximum du spectre qu'il émet se situe à $\lambda_m = 500$ nm ; puis T_{e1} celle de la Terre sans tenir compte de l'atmosphère.
2. En tenant compte de l'atmosphère et de l'albédo
   (a) En réalité le rayonnement émis par la Terre est piégé par l'atmosphère et constitue ce qu'on appelle l'effet de serre. L'atmosphère laisse passer le rayonnement solaire qui est transparente dans le visible mais absorbe l'infrarouge. On peut considérer l'atmosphère comme un corps noir qui émet dans l'infrarouge.
   Déterminer la température de surface de la Terre T_{e1} en tenant compte de l'atmosphère. Conclure.
   (b) La Terre réfléchit une partie de l'énergie qu'elle reçoit de la part du Soleil et absorbe le reste. La fraction réfléchie s'appelle l'albédo qu'on note A et dont on donne la valeur numérique $A = 0,31$.
   Déterminer la température de surface de la Terre T_{e2} en tenant compte de l'atmosphère. Conclure.

3. Amélioration du modèle
   (a) En s'aidant du document suivant, comment pourrait-on améliorer le modèle ?
   (b) Pourquoi le rejet par les activités humaines de méthane et de CFC dont la bande d'absorption est dans l'intervalle 8-12 μm doit-il être limité au maximum ?

Données numériques
- Rayon du Soleil : $R_S = 7,0.10^5$ km
- Rayon de la Terre : $R_T = 6,4.10^3$ km
- distance Terre-Soleil : $d_{T-S} = 1,5.10^8$ km
- Constante de Stefan : $\sigma = 5,67.10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4}
- Loi de Wien : $\lambda_m.T = 2898\,\mu$m.K



FIN DE L'ÉNONCÉ