

## Introduction

### Table des matières

|                                                                                   |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>I - Établissement de l'équation d'onde</b>                                     | <b>1</b> |
| 1) Onde transversale dans une corde vibrante . . . . .                            | 1        |
| 2) Onde acoustique longitudinale dans un solide . . . . .                         | 3        |
| <b>II - Solutions de l'équation d'onde</b>                                        | <b>4</b> |
| 1) L'équation . . . . .                                                           | 4        |
| 2) Onde plane progressive (OPP) . . . . .                                         | 5        |
| 3) Onde stationnaire . . . . .                                                    | 7        |
| <b>III Applications de la corde vibrante</b>                                      | <b>9</b> |
| 1) Régime libre d'une corde fixée à ses deux extrémités : modes propres . . . . . | 9        |
| 2) Régime forcé d'une corde fixée à une extrémité ; corde de Melde . . . . .      | 9        |

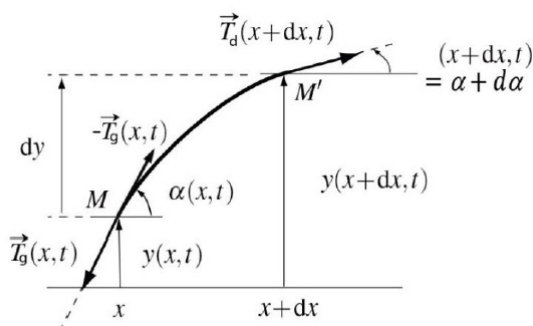
## I - Établissement de l'équation d'onde

### 1) Onde transversale dans une corde vibrante

#### a) Modèle

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au mouvement transversaux d'une corde sans raideur, dans l'approximation des petits mouvements. L'extrémité de droite sera attachée à une poulie et une masse pour s'assurer que les mouvements soient de faible amplitude, et que la corde ne bouge pas longitudinalement. L'extrémité de gauche sera fixée à un mur dans un premier temps.

Cette corde de longueur  $L$  sera considérée *sans raideur*, la direction de la tension de la corde sera donc toujours tangente à la corde et la valeur de cette force sera constante. De plus nous négligerons le poids de la corde. Les notations précises utilisées ici sont représentées sur la figure ci-dessous. Nous résonnerons sur un élément infinitésimal  $\vec{dl}$  de corde, de taille longitudinale  $dx$  et transversale  $dy$ .



Nous noterons  $\mu$  la densité linéique de masse de la corde, et  $T_0$  la norme de la tension de la corde. Le but de cette partie est de faire l'étude mécanique du bout de corde pour étudier ses petits mouvements.

Pour déterminer les forces subies par le petit bout de corde, il est nécessaire de préciser ce que la tension de la corde signifie.

On admet que la tension de la corde en un point M de cette corde correspond à la force que la partie à droite de M fait subir à la partie à gauche de M.

## b) Équation de D'Alembert

L'élément de corde subit donc la tension de la corde en M et M' : la résultante est  $\vec{T}_d + \vec{T}_g = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x)$ , et on peut appliquer le théorème de la résultante cinétique au bout de corde de masse  $dm$  :

$$dm\vec{a} = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x)$$

où  $\vec{a}$  est l'accélération de l'élément de corde. En projetant cette relation sur les deux axes  $Ox$  et  $Oy$ , on obtient :

$$\begin{cases} 0 = -T_x(x) + T_x(x+dx) & \text{sur l'axe } x \\ dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_y(x) + T_y(x+dx) & \text{sur l'axe } y \end{cases}$$

La première équation nous indique que la dérivée partielle de  $T_x$  selon  $x$  est nulle, la composante  $T_x$  est donc une constante, notée  $T_0$ .

En plus de ces deux équations dynamiques, nous allons maintenant discuter de l'orientation des vecteurs  $\vec{dl}$  et  $\vec{T}$ . Par définition,  $\vec{dl}$  (le déplacement élémentaire) est tangent à la corde, tout comme la tension de la corde. Donc, lorsque la taille de cet élément de corde va tendre vers 0, ces deux vecteurs doivent être *colinéaires*. Le déterminant de ces deux vecteurs doit donc être nul :

$$\begin{vmatrix} dx & T_x \\ dy & T_y \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$T_y = T_x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = T_0 \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

Il est à noter que cette approximation revient à conserver uniquement les termes d'ordre 1 lorsqu'on impose à la corde uniquement des petites oscillations ( $dy$  faible), soit, en calculant l'angle  $\alpha$  que fait la corde avec l'horizontale lors de ces petites oscillations :

$$\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

et

$$T_y \approx \alpha T_0 = T_0 \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

La projection selon l'axe  $y$  de la relation fondamentale de la dynamique peut se réécrire selon

$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} \cdot dx$$

En introduisant la contrainte de colinéarité entre  $\vec{dl}$  et  $\vec{T}$  (ou l'angle faible), il vient :

$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx$$

où  $dm = \mu \cdot dx$ . On obtient donc l'équation aux dérivées partielles suivante :

A RETENIR

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

où  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ . Cette équation est appelée **Équation de D'Alembert**. C'est elle qui rend compte des phénomènes de propagation comme ceux qui se produisent au niveau de la corde vibrante.

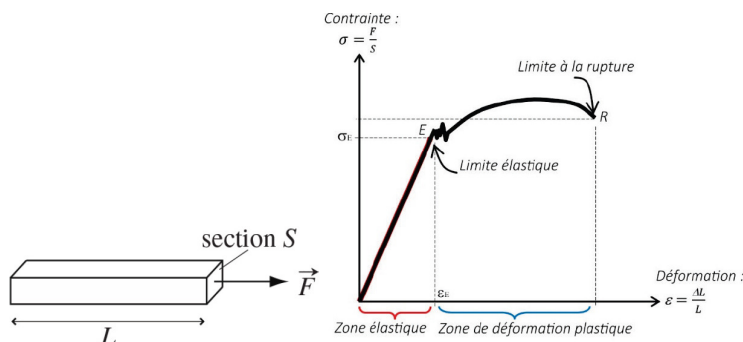
Il est à noter que l'onde se propage dans la direction de l'axe  $Ox$ , mais que la déformation (ici de la corde) se produit dans la direction  $Oy$ , orthogonale à  $Ox$ . On dit que l'onde est **transverse**. On verra plus tard que cette onde se propage à la célérité  $c$ .

## 2) Onde acoustique longitudinale dans un solide

Nous allons, avant d'étudier les solutions de l'équation de D'Alembert, étudier un autre domaine pour lequel les ondes se propagent en suivant une équation comme dans la partie précédente. Dans un solide, les atomes forment un réseau au sein duquel chacun est fortement lié à ses plus proches voisins et occupe une position d'équilibre stable. La propagation d'une onde acoustique dans le solide se traduit, pour chaque atome, par un écart à sa position d'équilibre dépendant du temps. Pour autant, cet écart est supposé suffisamment faible par rapport au pas du réseau pour qu'on puisse linéariser la force d'interaction.

### a) Loi de Hooke et module d'Young

Considérons un matériau de longueur  $L$  et de section  $S$  auquel on applique la force  $\vec{F}$ .



Expérimentalement, nous remarquons que plus la *contrainte* ( $\sigma = \frac{F}{S}$ ) appliquée est importante, plus l'allongement  $\Delta L$  du solide est important (sauf proche de la rupture). Dans le détail, cette contrainte est dans un premier temps proportionnelle à l'allongement relatif  $\frac{\Delta L}{L}$ , dans ce que l'on appelle la **zone élastique** : le solide se déforme de manière réversible, si bien que si la contrainte cesse, le solide reprend sa forme initiale ; si la contrainte est plus importante que  $\sigma_E$ , nous entrons dans la zone de déformation plastique, pour laquelle l'allongement du matériau se fait de manière irréversible, jusqu'à sa rupture R.

Dans la *zone élastique*, la proportionnalité conduit à écrire :

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$

où  $E$  est appelé **module d'Young** du matériau et est homogène à une pression (force divisée par une surface). Cette loi porte le nom de **Loi de Hooke**

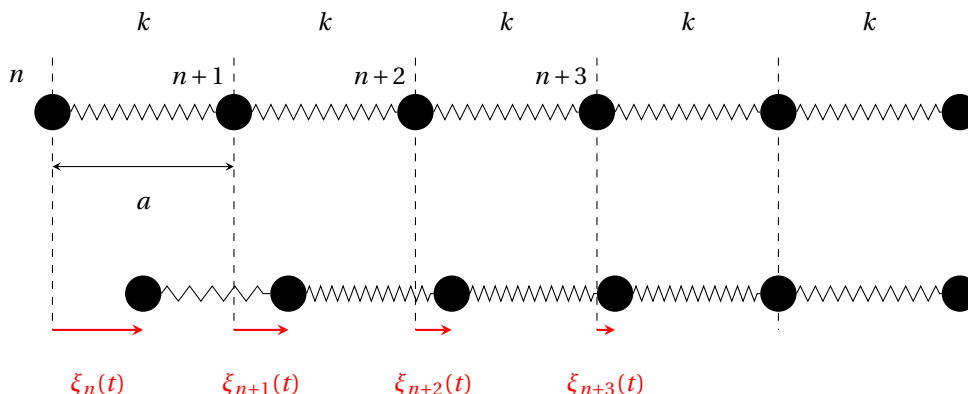
Quelques valeurs de module d'Young :

| Matériau  | Aluminium | Acier         | Zinc | Cuivre | Titane |
|-----------|-----------|---------------|------|--------|--------|
| $E$ (GPa) | 69        | $\approx 200$ | 78   | 122    | 114    |

### b) Modèle microscopique

On considère un solide élastique unidimensionnel, c'est-à-dire une chaîne infinie d'atomes liés entre eux par des ressorts identiques (on prend donc la modélisation précédente dans la zone élastique) de raideur  $k$  et de longueur à vide  $a$ . Ces ressorts modélisent donc les actions subies par les atomes au voisinage de leurs positions d'équilibre stable  $x_{n0} = n.a$ . Ils assurent le couplage entre les oscillateurs nécessaire à la propagation d'un signal.

Lors du passage de l'onde, l'atome qui se trouvait au repos en  $x_{n0}$  se trouve en  $x_n(t) = x_{n0} + \xi_n(t)$



Mouvement des atomes :

On applique le PFD à l'atome  $n$ , qui subit les forces  $\vec{F}_{n-1 \rightarrow n}$  et  $\vec{F}_{n+1 \rightarrow n}$  de la part de ses deux voisins.

$$\vec{F}_{n-1 \rightarrow n} = -k(x_n - x_{n-1} - a)\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_{n+1 \rightarrow n} = -k(x_{n+1} - x_n - a)(-\vec{u}_x)$$

Ainsi :

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} \vec{u}_x = -k(x_n - x_{n-1} - a) \vec{u}_x + k(x_{n+1} - x_n - a) \vec{u}_x$$

soit, en projection sur  $Ox$  :

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -k(\xi_{n+1}(t) + \xi_{n-1}(t) - 2\xi_n(t))$$

**c) Approximation des milieux continus, équation d'onde**

Les distances interatomiques sont de l'ordre de  $10^{-9}$  m tandis que la distance caractéristique des variations spatiales d'une onde acoustique est supérieure au cm pour des ondes audibles. On peut donc considérer le milieu comme continu à l'échelle de l'onde, et décrire les déformations dues au passage de celle-ci non plus par une suite de fonctions  $\xi_n(t)$  mais par une fonction de deux variables  $\xi(x, t)$ . On dit que l'on fait l'**approximation des milieux continus**. le raccordement entre le modèle précédent discret et le modèle continu s'écrit :

$$\xi(x = n.a, t) = \xi_n(t)$$

Cette approximation permet d'écrire :  $\xi_{n+1}(t) = \xi(x + a, t)$  et  $\xi_{n-1}(t) = \xi(x - a, t)$  et donc de réaliser un DL de ces fonctions, autour de  $x = na$  :

$$\xi(x \pm a, t) = \xi(x, t) \pm a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

et l'équation du mouvement devient :

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -k \left( a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)$$

L'équation du mouvement des atomes lors du passage de l'onde vérifient donc à nouveau une **équation de D'Alembert** (ou équation d'onde) :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

où la célérité est cette fois-ci

$$c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}$$

**II - Solutions de l'équation d'onde****1) L'équation**

Soit  $\psi(x, t)$  un champ 1D ; l'équation de D'Alembert est l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation est **caractéristique d'un phénomène de propagation à la célérité  $c$**  (en  $\text{m.s}^{-1}$ )

Propriété :

- l'équation de D'Alembert est *linéaire* (donc théorème de superposition et utilisation de la notation complexe pour transformer les ED en équations algébriques) ;
- l'équation de D'Alembert est *réversible* (si  $\psi(x, t)$  est solution alors  $\psi(x, -t)$  aussi) : la propagation peut avoir lieu dans les deux sens  $x$  croissants et/ou  $x$  décroissants.

Théorème :

**Théorème de superposition** : une équation d'onde est dite linéaire si, pour tout couple de solutions  $(\psi, \varphi)$  et pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\alpha\psi + \beta\varphi \quad \text{est aussi solution de l'équation d'onde}$$

(on pourra vérifier que l'équation de D'Alembert est effectivement linéaire...). il en résulte le théorème de superposition :

Soit une équation d'onde linéaire. Alors

**Une combinaison linéaire de fonctions solutions est encore une solution.**

En termes plus "physiques", les ondes se superposent : si on envoie deux ondes  $\psi$  et  $\varphi$ , l'onde totale est  $\psi + \varphi$ .

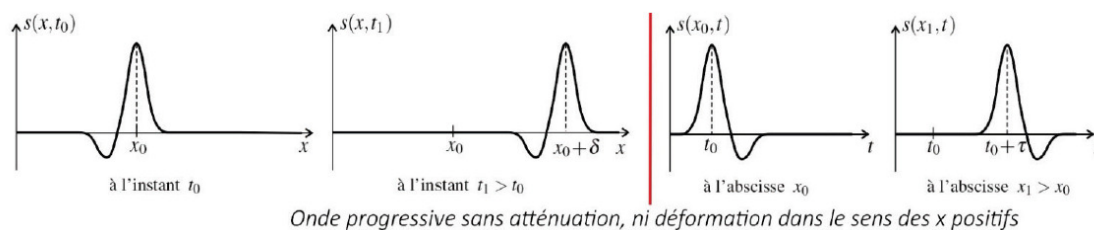
L'équation de D'Alembert est une équation aux dérivées partielles, dont la forme des solutions dépend fortement des conditions aux limites et des conditions initiales (comme c'est le cas pour l'équation de la diffusion). Cependant, on peut montrer mathématiquement que toute solution de l'équation de D'Alembert peut s'écrire sous la forme

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

qui correspond à une onde *progressive* dans le sens des  $x$  croissants ( $f$ ) et une onde progressive dans le sens des  $x$  décroissants ( $g$ ). Ces points ont été abordés en sup PCSI et vont être précisés cette année.

## 2) Onde plane progressive (OPP)

### a) Généralités



Une onde progressive se déplace en temps et en espace (= se propage) sans se déformer.

### Remarque :

- Une onde progressive dans le sens des  $x$  décroissants est parfois appelée "onde régressive".
- L'existence d'une onde régressive est généralement liée à la possibilité d'un retour de l'onde progressive initialement dans le sens des  $x$  croissants, par exemple causé par la présence d'un obstacle le long du chemin de l'onde progressive. En l'absence de tout obstacle (ou de source émettrice!), la solution est une onde progressive qui se propage dans un seul sens.
- **Notion d'onde plane** : ici, nous n'avons considéré que des ondes unidimensionnelles, il est possible de généraliser cette étude au cas tridimensionnel. Dans ce cas, il y aura une direction de propagation (par exemple l'axe  $Ox$ ) et deux directions ( $Oy$  et  $Oz$  qui définissent donc un plan orthogonal à  $Ox$ ) pour lesquelles l'amplitude de l'onde est constante. On parle d'*onde plane*.

### b) L'exemple de l'OPPH

L'introduction de  $f$  et  $g$  ne résout pas l'équation, puisqu'il reste à trouver la forme de  $f$  et  $g$ . En pratique, on s'intéresse à une forme particulière de solutions : les **ondes planes progressives harmoniques** (OPPH). La raison est que cette famille de solutions constitue une base de solutions (au sens de famille libres et génératrices). N'importe quelle solution de l'équation de D'Alembert peut donc s'écrire comme combinaison linéaire d'ondes progressives harmoniques.

**Remarque** : À l'inverse, toute combinaison linéaire d'ondes progressives harmoniques solutions de l'équation de D'Alembert est solution en vertu du théorème de superposition.

Une OPPH dans le sens des  $x$  croissants s'écrit

$$\psi_+(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$$

où  $\psi_0$  est l'amplitude de l'onde,  $\omega$  sa pulsation,  $k$  son vecteur d'onde et  $\phi$  sa phase à l'origine spatiale et temporelle. Une onde progressive harmonique dans le sens des  $x$  décroissants s'écrit de la même manière

$$\psi_-(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t + kx + \phi)$$

Une onde plane progressive harmonique **n'existe pas physiquement**. Elle est d'amplitude constante de  $t = -\infty$  jusqu'à  $t = +\infty$ , et remplit tout l'espace de  $x = -\infty$  à  $x = +\infty$ . Une telle onde a donc une **énergie infinie** et ne correspond par conséquent à rien de réel.

#### Remarque :

- Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est bien un vecteur pour les ondes en 3D. Dans ce chapitre, sur les ondes 1D, c'est un scalaire. Le vecteur d'onde pointe dans la direction de propagation et son sens est celui de la propagation
- Lorsqu'il est possible de choisir l'origine des temps, on peut le redéfinir par  $t \rightarrow t - \frac{\phi}{\omega}$  on fait alors disparaître la phase à l'origine :  $\psi_+(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx)$ .
- Double périodicité.** Une onde progressive harmonique est caractérisée par une double périodicité (voir Sup).

| Périodicité temporelle |                                    | Périodicité spatiale |                                         |
|------------------------|------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------|
| Période                | $T$                                | Longueur d'onde      | $\lambda$                               |
| Fréquence              | $f = \frac{1}{T}$                  | Nombre d'onde        | $\sigma = \frac{1}{\lambda}$            |
| Pulsation              | $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ | Vecteur d'onde       | $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$ |

#### NOTATION COMPLEXE :

Il est très utile d'utiliser la notation complexe pour les ondes progressives harmoniques. On définit la notation complexe comme en électrocinétique :

$$\psi_+(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \phi) \rightsquigarrow \underline{\psi}_+(x, t) = \underline{\psi}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

où  $\underline{\psi}_0 = \psi_0 e^{i\phi}$  correspond à l'amplitude complexe de l'onde. On se rappellera que dans ce cas la dérivation devient un produit. On fera également attention aux signes qui changent lorsqu'on passe de  $\underline{\psi}_+(x, t)$  à  $\underline{\psi}_-(x, t)$

On retrouve l'expression réelle en prenant la partie réelle de la notation complexe :

$$\psi_+(x, t) = \text{Re}(\underline{\psi}_+(x, t)) = \text{Re}(\underline{\psi}_0 e^{i(\omega t - kx)})$$

ATTENTION!!

⚠ **L'utilisation de la notation complexe n'est possible que pour des opérations linéaires** ⚠

(notamment sommes, dérivées, intégrales,...) Cela s'explique par le fait que la partie réelle est elle-même linéaire.

$$\text{Re}(\underline{f} + \underline{g}) = \text{Re}(\underline{f}) + \text{Re}(\underline{g}) \quad \text{en revanche} \quad \text{Re}(\underline{f} \times \underline{g}) \neq \text{Re}(\underline{f}) \times \text{Re}(\underline{g})$$

#### c) Relation de dispersion

On appelle *relation de dispersion* la relation liant  $\omega$  et  $k$  pour une onde progressive harmonique vérifiant une équation d'onde. Dans les cas de l'équation de D'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

pour qu'une onde progressive harmonique  $\underline{\psi}_0 e^{i(\omega t - kx)}$  soit solution il faut (à montrer !!)

$$\omega^2 = c^2 k^2$$

soit  $k = \pm \frac{\omega}{c}$ , qui justifie la propagation dans les deux sens de l'axe  $Ox$ . Il est à noter que la relation de dispersion est **équivalente à l'équation d'onde**

#### d) Solution générale

La solution en onde progressive harmonique n'a que peu de sens physique, nous en avons déjà parlé. En revanche, on pourra, grâce à l'analyse de Fourier (voir Sup), décrire toute solution de l'équation de D'Alembert non harmonique sous la forme d'une superposition d'ondes progressives harmoniques :

$$\psi_{\text{réel}}(x, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \psi_0(\omega) e^{i(\omega t - kx + \phi)} d\omega = f(x - ct)$$

qui constitue un **paquet d'onde**, solution plus réaliste. L'étude de ce type de solutions se fait par l'étude de chaque composante harmonique, en vertu du principe de superposition.

### 3) Onde stationnaire

Un autre type de solution de l'équation de D'Alembert est l'onde stationnaire. En effet, on a vu que la solution générale est la superposition de deux ondes : l'une se déplaçant vers les  $x$  croissants et l'autre vers les  $x$  décroissants. On peut donc naïvement se dire qu'au final, l'onde reste sur place, elle est stationnaire. Ces solutions apparaissent naturellement lorsqu'on veut résoudre l'équation de D'Alembert, en utilisant la méthode de *séparation des variables* : on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

les variables  $x$  et  $t$  semblent se séparer facilement. On propose donc que la solution générale de cette équation sera sous la forme  $\psi(x, t) = X(x).T(t)$ . Dans ce cas, on obtient :

$$X''(x).T(t) = \frac{1}{c^2} X(x).T''(t)$$

soit, en supposant que ni  $X$  ni  $T$  ne sont identiquement nulles

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}$$

pour tout  $x$  et  $t$  réels. Comme cette égalité est valable quel que soit  $x$  ou  $t$ , la seule solution pour que cela fonctionne est que  $c^2.X''(x)/X(x) = \alpha$  et  $T''(t)/T(t) = \alpha$ , où  $\alpha$  est une constante réelle. Trois cas sont à distinguer :

- $\alpha > 0$  : la résolution de  $\ddot{T}(t) = \alpha T(t)$  donne directement  $T(t) = T_0 \exp(-\sqrt{\alpha}t) + T_1 \exp(\sqrt{\alpha}t)$  et  $X(x) = X_0 \exp(-\sqrt{\alpha}x/c) + X_1 \exp(\sqrt{\alpha}x/c)$ . Ces solutions présentent peu d'intérêt physiquement du fait de la présence d'un terme qui s'annule rapidement et d'un autre qui est divergent. *Nous rejetons donc ce cas.*
- $\alpha = 0$  : la résolution donne  $T(t) = T_0 t + T_1$  et  $X(x) = X_0 x + X_1$ , ce qui n'est pas une solution physique non plus ; *nous la rejetons également.*
- $\alpha = -\omega^2 < 0$  : dans ce cas, on obtient pour  $T$  et  $X$  :

$$\begin{aligned} T(t) &= T_0 \cos(\omega t + \phi), \\ X(x) &= X_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \varphi\right). \end{aligned}$$

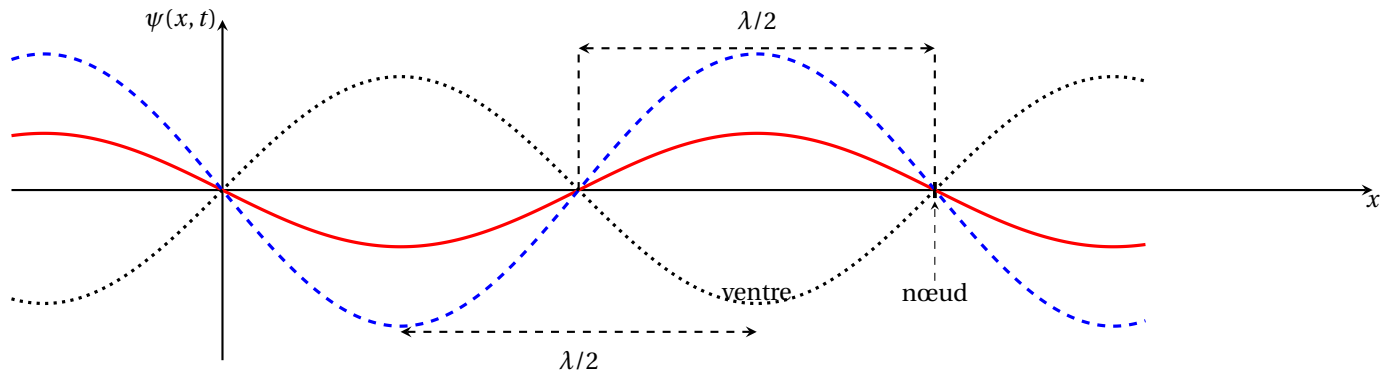
Cette solution indique que la partie spatiale et temporelle de la solution oscillent toutes les deux, ce qui conduit à une solution générale de la forme :

$$\psi(x, t) = Y_m \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \phi)$$

avec  $k = \omega/c$ . Cette onde stationnaire est solution de l'équation de D'Alembert. Elle ne se propage pas au sens vu dans la section précédente.

*Ce type de solutions est particulièrement adapté pour des géométries confinées*

**Tracé de  $\psi(x, t)$  à différents instants en fonction de  $x$**  (CL :  $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$  pour tout  $t$  réel)



**Définition :** *Nœuds et ventres.* On considère l'onde stationnaire solution de l'équation de D'Alembert

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \phi)$$

Cette onde oscille (temporellement) "sur place", avec une amplitude  $\psi_0 \cos(kx + \varphi)$  qui dépend de  $x$ .

- On appelle **nœuds** de l'onde les positions  $x$  pour lesquelles l'amplitude de l'oscillation temporelle est minimale. Elle correspond aux  $x_N$  tels que

$$\cos(kx_N + \varphi) = 0$$

- On appelle **ventres** de l'onde les positions  $x$  pour lesquelles l'amplitude de l'oscillation temporelle est maximale. Elle correspond aux  $x_V$  tels que

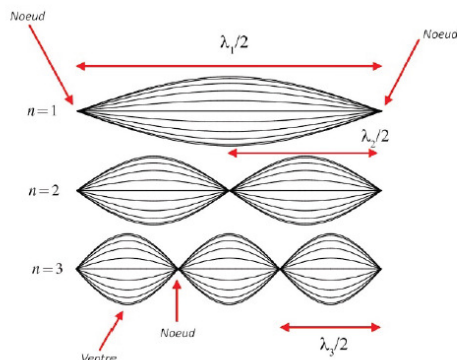
$$\cos(kx_V + \varphi) = \pm 1$$

Deux nœuds ou ventres successifs sont séparés de  $\frac{\lambda}{2}$ . Un nœud et un ventre successif sont séparés de  $\frac{\lambda}{4}$ .

Le théorème de superposition assure que la somme de deux ondes stationnaires solutions de l'équation de D'Alembert est encore une solution. On admet par ailleurs que les ondes stationnaires sont également une base de solutions, comme les ondes progressives harmoniques.

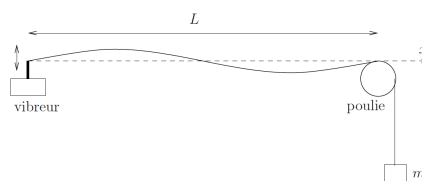
### III - Applications de la corde vibrante

#### 1) Régime libre d'une corde fixée à ses deux extrémités : modes propres



#### 2) Régime forcé d'une corde fixée à une extrémité ; corde de Melde

On considère le montage expérimental ci-dessous :



Le but de ce paragraphe est de comprendre pourquoi on obtient expérimentalement les modes propres d'une corde fixée aux deux extrémités par ce montage.

Le vibreur permet d'imposer un *régime forcé* à la pulsation  $\omega$ . On cherche comme solution une onde stationnaire, en s'inspirant de la partie précédente :

$$y(x, t) = a \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx + \psi).$$

Les conditions aux limites imposées ici sont les suivantes :

- le vibreur impose l'amplitude en  $x = 0$ , pour tout  $t$  sous la forme (oscillation à la pulsation  $\omega$ ) :

$$y(0, t) = A \sin \omega t,$$

- la poulie en  $x = L$  impose une déformation nulle de la corde en ce point (nœud de vibration) :

$$y(L, t) = 0.$$

On en déduit, pour tout temps  $t$  :

$$\begin{aligned} a \sin(\omega t + \varphi) \sin(\psi) &= A \sin \omega t, \\ a \sin(\omega t + \varphi) \sin(kL + \psi) &= 0. \end{aligned}$$

Comme  $a \neq 0$  (onde non nulle), on obtient, pour le cas particulier de  $t = 0$  :

$$\begin{aligned} a \sin(\varphi) \sin(\psi) &= 0, \\ \sin(\varphi) \sin(kL + \psi) &= 0. \end{aligned}$$

Un choix possible pour  $\varphi$  est :  $\varphi = 0 [2\pi]$ , ce qui permet de satisfaire les deux égalités. On a donc, pour tout  $t$  :

$$\begin{aligned} a \sin(\omega t) \sin(\psi) &= A \sin \omega t, \\ \sin(\omega t) \sin(kL + \psi) &= 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} a \sin(\psi) &= A, \\ \sin(kL + \psi) &= 0. \end{aligned}$$

La deuxième équation permet de trouver  $\psi$  :  $kL + \psi = n\pi$ , soit  $\psi = n\pi - kL$ , et on obtient  $a$  grâce à la première équation :

$$a = \frac{A}{\sin \psi} = \frac{A}{\sin(n\pi - kL)} = (-1)^{n+1} \frac{A}{\sin kL}.$$

On en déduit alors l'expression complète de la déformation transverse :

$$y(x, t) = (-1)^{n+1} \frac{A}{\sin kL} \sin \omega t \sin(kx - kL + n\pi) = \frac{A}{\sin kL} \sin \omega t \sin(k[x - L]).$$

À  $t$  donné, si on trace  $y(x, t)$  en fonction de  $x$ , l'amplitude est  $\frac{A}{\sin(kL)} \sin \omega t$ , de valeur maximale  $\frac{A}{\sin(kL)}$ . On constate qu'elle diverge (ou qu'elle est maximale) si  $\sin(kL) = 0$ , c'est-à-dire si  $kL = p\pi$  ( $p \in \mathbb{N}$ ), soit  $L = p \frac{\lambda}{2}$ .

On retrouve les modes propres du régime libre. Autrement dit, si la pulsation d'excitation du vibreur est égale à la pulsation d'un mode propre de la corde fixée aux deux extrémités, on observe des vibrations avec une amplitude très grande (en pratique pas infinie à cause des frottements). Ce phénomène porte le nom de **résonance**, c'est le même phénomène que celui vu en RSE.