

Introduction

Une personne qui parle, une voiture qui passe, de la musique, voilà différents exemples de la vie courante que nous désignons tous sous le terme "ondes acoustiques" ou "ondes sonores". Ces phénomènes sont-ils vraiment ondulatoires (au sens de solution de l'équation de D'Alembert) ? Quelles sont les grandeurs physiques mises en jeu ?

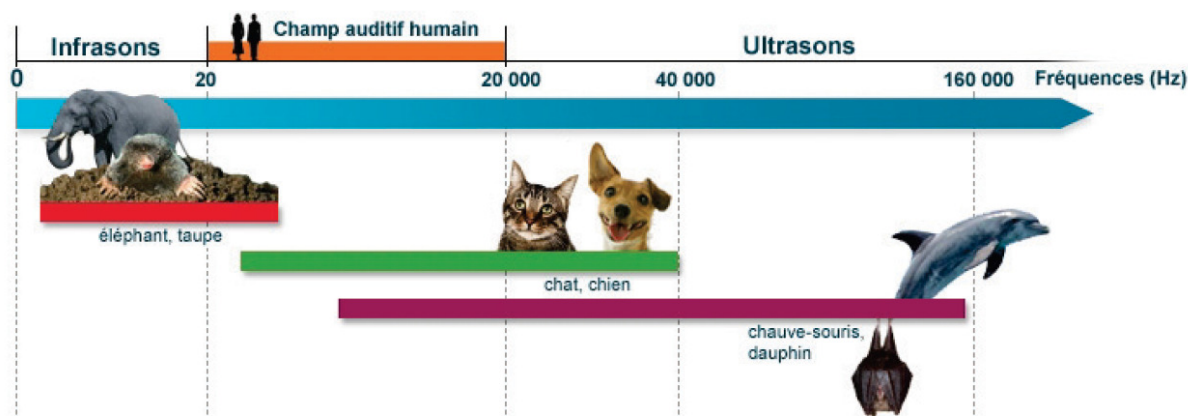
Dans ce chapitre, nous allons poursuivre l'étude des phénomènes ondulatoires en nous arrêtant sur le cas des ondes acoustiques. Cet exemple est particulièrement important en physique des ondes, car il permet de montrer un cas où plusieurs grandeurs physiques scalaires ou vectorielles se propagent. Nous allons également en profiter pour étudier quelques instruments à vent, et des phénomènes physiques spectaculaires comme le "bang" supersonique que certains avions subissent.

Table des matières

I - Équation de propagation des ondes acoustiques	1
1) Domaine de fréquences	1
2) Cadre de l'étude et approximation acoustique	1
3) Équations de couplage et linéarisations	2
4) Équation de propagation pour la surpression	3
II - Forme des solutions et aspects énergétiques	5
1) Solution sous forme d'OPPH ; impédance acoustique	5
2) Aspects énergétiques ; intensité sonore	6
3) Ondes acoustiques sphériques harmoniques	8
4) Solutions en ondes stationnaires	9
III Réflexion et transmission d'une onde acoustique	9
1) Présentation du problème	9
2) Conditions de continuité ; ondes à l'interface	10
3) Coefficients de réflexion et de transmission sous incidence normale	10
4) Interprétation	12

I - Équation de propagation des ondes acoustiques

1) Domaine de fréquences



2) Cadre de l'étude et approximation acoustique

Dans tout ce chapitre, les effets de la pesanteur ou de viscosité ne seront pas pris en compte. L'étude des ondes acoustiques dans un fluide revient à étudier les variations de pression, de vitesse et de masse volumique de ce fluide. En effet, on peut représenter le passage d'une onde sonore dans de l'air au repos sous la forme suivante :



Air au repos : Les différentes couches d'air sont au repos



En présence d'une perturbation : les différentes couches d'air sont comprimées puis détendues.

Les couches d'air en se comprimant puis se détendant vont entraîner une modification de pression, de masse volumique et de vitesse du gaz (ici l'air).

On considère que, lorsque le fluide est au repos, celui-ci possède une pression P_0 , une température T_0 et une masse volumique ρ_0 supposées constantes dans le temps et uniformes dans tout le fluide.

Une onde acoustique sera décrite dans la suite comme une variation de pression, de masse volumique et du champ de vitesses selon :

$$\begin{cases} P(x, y, z, t) = P_0 + p_1(x, y, z, t) \\ \rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \mu(x, y, z, t) \\ \vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}_1(x, y, z, t) \end{cases},$$

où $p_1(x, y, z, t)$ représente la pression acoustique, ou *supression* dde l'air au passage de l'onde, et $\mu(x, y, z, t)$ représente la variation de masse volumique.

APPROXIMATION ACOUSTIQUE

Il est à présent nécessaire de discuter l'ordre de grandeur des quantités que nous venons d'introduire. L'**approximation acoustique** consiste à considérer que $|p_1| \ll P_0$, $\mu \ll \rho_0$, et $|\vec{v}_1| \ll c_s$, où c_s est la célérité de l'onde acoustique.

3) Équations de couplage et linéarisations

Nous allons introduire ici les équations mécaniques et thermodynamiques qui relient les trois grandeurs précédentes dans un fluide, ainsi que leur simplification dans le cadre de l'approximation acoustique. Pour simplifier, nous nous plaçons ici à une dimension (Ox), et que les champs eulériens (pression, de vitesse et de masse volumique) ne dépendent que de x .

a) Équation d'Euler

La description dynamique des mouvements du fluide lors du passage de l'onde est incluse dans l'équation d'Euler :

$$\rho(x, t) \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(x, t) + \left(\vec{v}(x, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}(x, t) \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P(x, t)$$

Dans le membre de droite de cette équation, on remplace $P(x, t)$ par $P_0 + p_1(x, t)$, et on obtient directement : $-\overrightarrow{\text{grad}} P(x, t) = -\frac{\partial p_1}{\partial x}(x, t) \vec{u}_x$, car P_0 est supposée constante. Étudions maintenant le terme $\rho(x, t) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(x, t)$: comme $\vec{v} = \vec{v}_1$ est un terme infiniment petit (devant la célérité de l'onde acoustique), la *linéarisation à l'ordre 1* de ce terme donne $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(x, t) = \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}(x, t) \vec{u}_x$.

De la même façon, le dernier terme (terme convectif) se développe sous la forme : $v_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} \cdot \vec{u}_x$. C'est un terme d'ordre 2, car la vitesse d'ensemble du fluide est d'ordre 1 ; on va donc totalement négliger ce terme, lors de la linéarisation. L'équation dynamique du fluide projetée sur (Ox) s'exprime donc, sous sa forme linéarisée :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}}$$

b) Équation de conservation de la masse

L'équation dynamique locale est à associer avec l'**équation de conservation de la masse**

$$\rho(x, t) \text{div} \vec{v}(x, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = 0$$

que nous allons linéariser. Comme $\vec{v} = \vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$ est déjà d'ordre 1, cette équation devient, à cet ordre :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial \mu}{\partial t}}$$

c) Description thermodynamique du fluide

L'onde acoustique est donc une succession de compressions du fluide qui se propagent. Ces transformations thermodynamiques, seront supposées *adiabatiques* et *réversibles*, c'est-à-dire isentropiques; cela revient à négliger tout phénomène irréversible, tel la diffusion de particules, la diffusion thermique ou la viscosité du fluide. Cette approximation est cohérente avec l'approximation ci-dessus qui consiste à ne considérer que des transformations pour lesquelles la variation de pression est très faible. Le coefficient thermoélastique que l'on va utiliser dans la suite pour décrire le fluide avec précision sera donc le coefficient de **compressibilité isentropique** χ_s :

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$$

On va maintenant linéariser ce coefficient thermoélastique qui décrit le comportement du gaz. Comme $V = m/\rho$, on trouve

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \approx \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s$$

Il paraît en effet relativement logique de penser que le terme d'ordre 1 dans cette expression vient de la dérivée, et non du préfacteur. Il s'agit maintenant donc de calculer ρ , et plus particulièrement sa dérivée par-rapport à la pression, à entropie constante. On peut écrire : $\rho(P, S)$, et donc $\rho_0 = \rho(P_0, S)$. Comme l'entropie est constante et que la surpression p_1 est faible, il vient

$$\rho(P, S) = \rho(P_0 + p_1, S) = \rho(P_0, S) + p_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s + O(p_1^2)$$

et comme $\rho(P, S) = \rho_0 + \mu(P, S)$, il vient :

$$\mu = p_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s$$

soit

$$\chi_s = \frac{\mu}{\rho_0 p_1}$$

Ceci constitue la troisième et dernière équation linéarisée qui va nous permettre de trouver l'équation de propagation.

4) Équation de propagation pour la surpression

a) Cas unidimensionnel

Je rappelle les 3 équations linéarisées que nous allons utiliser :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\ \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial \mu}{\partial t} \\ \mu = \chi_s \rho_0 p_1 \end{cases},$$

On commence par dériver par-rapport à x l'équation d'Euler linéarisée :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial^2 x}$$

puis, on essaie de faire apparaître le même terme dans la conservation de la masse en dérivant l'équation par-rapport à t :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 \mu}{\partial^2 t}$$

THÉORÈME DE SCHWARZ

Ce théorème (admis) permet de justifier l'inversion de l'ordre de dérivation pour une fonction f de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ (donc 2 fois dérivables) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

On obtient alors, à l'aide du théorème de Schwarz :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 \mu}{\partial^2 t} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial^2 x}$$

On obtient alors, comme $\mu = \chi_S \rho_0 p_1$:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial^2 x} - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial^2 t} = 0$$

On retrouve bien l'équation de D'Alembert ; la **célérité** de l'onde est alors

$$c_s = \frac{1}{\rho_0 \chi_S}$$

On peut montrer (à faire en application...) que μ et v_1 vérifient exactement la même équation de D'Alembert.

b) Généralisation

On peut aisément (mais c'est admis...) généraliser cette équation de D'Alembert à trois dimensions en introduisant l'opérateur "Laplacien" :

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial^2 t} = 0$$

c) Célérité : cas du GP

Dans le cas des gaz parfaits qui subissent des transformations isentropiques, on trouve

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_S} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

où γ est le coefficient de Laplace (indice adiabatique) du gaz et M la masse molaire de ce gaz parfait. Dans le cas de l'air ($M=29 \text{ g.mol}^{-1}$) qui peut être considéré comme un gaz parfait diatomique ($\gamma = 7/5$), on trouve à température ambiante ($T_0 = 298 \text{ K}$) :

$$c = 346 \text{ m.s}^{-1}$$

Dans le tableau ci-dessous sont données les célérités de différents gaz. Plus un gaz est lourd, moins la célérité est importante.

Espèce	c_s en m.s^{-1}
O ₂	317
air	346
N ₂	339
H ₂	1270

II - Forme des solutions et aspects énergétiques

1) Solution sous forme d'OPPH ; impédance acoustique

Dans le cas unidimensionnel (de direction spatiale x), comme nous l'avons vu au chapitre précédent, il existe des solutions sous forme d'ondes planes à cette équation :

$$\phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

où $f(x - ct)$ est une onde plane se propageant dans le sens des x croissants, et $g(x + ct)$ est une onde plane se propageant dans le sens des x décroissants. Dans le cas tridimensionnel, une onde plane se propage dans une direction fixe, dont le vecteur directeur unitaire sera noté $\vec{u}$. Dans ce cas, les solutions sous forme d'ondes planes s'écriront sous la forme ($\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$) :

$$\phi(\vec{r}, t) = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) + g(\vec{u} \cdot \vec{r} + ct)$$

où f est une onde plane progressive dans le sens de $\vec{u}$ et g est une onde progressive dans le sens opposé à $\vec{u}$. L'amplitude des deux ondes progressives est constante dans tout plan perpendiculaire à $\vec{u}$.

a) OPPH

Une OPPH, comme on l'a déjà vu en 1D dans le chapitre précédent se propageant dans le sens du vecteur unitaire $\vec{u}$ est caractérisée par :

- sa **fréquence** temporelle f ou sa **pulsation** $\omega = \frac{2\pi}{f}$.
- sa **longueur d'onde** $\lambda = \frac{c}{f}$, ou son vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$.

Une OPPH présente une double périodicité spatiale et temporelle.

Comme précédemment, nous allons utiliser la notation complexe pour les OPPH. Pour la suppression, nous pouvons écrire l'OPPH se propageant dans le sens de $\vec{u}$:

$$p_1(\vec{r}, t) = \underline{p}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

où $\underline{p}_0$ est un nombre complexe. En utilisant l'équation de D'Alembert dérivée au paragraphe précédent couplée aux OPPH complexes, il est possible de retrouver la **relation de dispersion** des ondes acoustiques :

$$-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (1)$$

Le vecteur d'onde est donc réel, et la norme $k = \frac{\omega}{c}$.

b) Impédance acoustique

Définition :

Impédance acoustique : On définit l'impédance acoustique du milieu comme le rapport, en complexe :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{p}_1}{\underline{v}_1}$$

Pour trouver l'expression de l'impédance acoustique, il faut donc trouver la vitesse $v_1(x, t)$: on se place à nouveau à 1 dimension ; pour cela on part de l'équation d'Euler linéarisée, et on injecte la solution en OPPH complexe pour p_1 :

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -k \underline{p}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

puis on peut diviser par ρ_0 et intégrer par rapport à t cette expression pour obtenir (le fluide est au repos, donc il n'y a pas de vitesse constante dans le problème) :

$$\underline{v}_1 = \frac{k}{\omega \rho_0} \underline{p}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \frac{1}{\rho_0 c} \underline{p}_1$$

soit

$$\underline{Z} = \rho_0 c$$

Remarque :

- dans le cas d'une propagation dans le sens des x décroissants, on peut montrer que $p_1 = -\rho_0 c v_1$, et on trouve :

$$\underline{Z} = -\rho_0 c$$

- Si on se place à 3 dimensions, on obtient la même relation, en utilisant les formes 3D de la conservation de la masse et de l'équation d'Euler. Les règles de calcul des opérateurs en complexe sont : $\overrightarrow{\text{grad}} f = i\vec{k}f$; $\text{div } \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A}$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = i\vec{k} \wedge \vec{A}$ et $\Delta \vec{A} = -\vec{k}^2 \vec{A}$;
- Toujours à 3D, l'expression de l'équation d'Euler donne :

$$i\omega\rho_0\underline{v}_1 = i\vec{k}\underline{p}_1$$

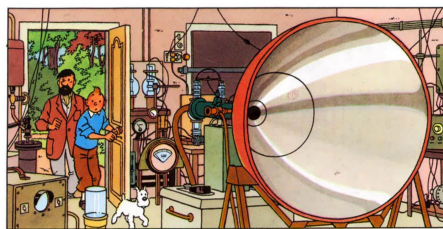
Le vecteur vitesse et la direction de propagation de l'onde sont identiques ; les perturbations se produisent dans le sens de la propagation : on parle d'**onde longitudinale**.

c) Superposition d'OPPH

Comme nous l'avons déjà évoqué plusieurs fois, le modèle de l'OPPH n'est pas un modèle physique, car l'OPPH "n'existe pas". En revanche, une superposition d'OPPH peut rendre compte de phénomènes physiques réalistes :

2) Aspects énergétiques ; intensité sonore

Dans la bande dessinée "L'affaire Tournesol", le savant Tryphon Tournesol met au point un appareil à ultrasons capable de briser du verre à distance ; des sons trop fort comme en discothèque peuvent également endommager les tympans (sans aller jusqu'à briser les verres !). L'explication de ces phénomènes vient du fait que les ondes acoustiques transportent de l'énergie. Dans cette partie nous allons nous intéresser à ces transferts.

**a) Énergie volumique**

Il existe deux contributions à l'énergie volumique d'un matériau dans lequel se déplace une onde acoustique.

- La première contribution est la *densité volumique d'énergie cinétique*. En chaque point du matériau, l'énergie cinétique volumique vaut :

$$e_c = \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\mu_0\vec{v}_1^2$$

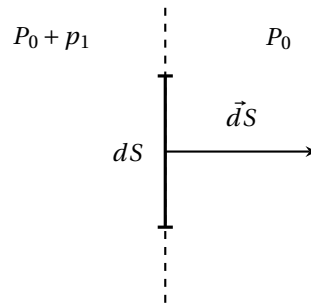
si on ne conserve que les termes d'ordre 2. Ici, il n'existe pas de terme d'ordre 1, ce terme est identiquement nul.

- La seconde contribution est la *densité volumique d'énergie potentielle*. Sous l'effet de la pression, le fluide dans lequel l'onde se propage se comprime ou se détend, selon la valeur de sa compressibilité χ_s ; on obtient, à l'ordre 2 :

$$e_p = \frac{1}{2}\chi_s p_1^2$$

b) Vecteur de Poynting acoustique

Considérons une section élémentaire dS de fluide qui sépare une portion à la pression $P_0 + p_1$ à gauche de dS , d'une portion à la pression P_0 à droite de cette section (passage d'une onde acoustique). On oriente cette section comme présenté sur la figure ci-dessous. À cause du passage de l'onde, cette section de fluide se déplace à la vitesse $\vec{v}_1$.



La force de pression exercée par la partie de droite sur la partie de gauche est donnée par : $d\vec{F} = p_1 d\vec{S}$. La puissance $d\mathcal{P}$ de cette force est donc : $d\mathcal{P} = d\vec{F} \cdot \vec{v}_1 = p_1 \vec{v}_1 \cdot d\vec{S}$.

Nous en déduisons donc la puissance transmise à travers une section (S) du fluide soumis à une onde acoustique :

$$\mathcal{P} = \iint_{(S)} p_1 \vec{v}_1 \cdot d\vec{S}$$

On notera dans la suite

$$\vec{\Pi} = p_1 \vec{v}_1$$

où $\vec{\Pi}$ est appelé **vecteur de Poynting** ; ce vecteur est homogène à une puissance surfacique et s'exprime en $W.m^{-2}$. On l'appelle également "vecteur densité surfacique de puissance sonore", de manière analogue à l'électromagnétisme.

c) Bilan d'énergie

Considérons un volume V quelconque de fluide. On note S la surface de ce volume. Cette surface est orientée par le vecteur $d\vec{S}$ en chaque point vers l'extérieur du volume V par convention. La question à laquelle nous allons répondre est la suivante : *comment varie l'énergie d'un tel système pendant un temps infinitésimal dt ?*

Tout d'abord, l'énergie cinétique et potentielle varient. Si on note $d\tau$ un élément infinitésimal de ce volume V , la variation totale pendant un temps dt d'énergie cinétique et potentielle vaut :

$$d(E_c + E_p) = \iiint_V (e_c(t+dt) - e_c(t) + e_p(t+dt) - e_p(t)) d\tau,$$

tout en se rappelant que la cause de variation d'énergie de ce volume est qu'une partie de la puissance est transmise du fait du passage de l'onde. Cette transmission d'énergie est prise en compte par le flux du vecteur de Poynting sur toute la surface S pendant le temps dt , ce qui conduit à l'énergie :

$$\oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt.$$

Nous utilisons ici le théorème de **Green-Ostrogradsky** pour transformer cette intégrale double en intégrale triple :

$$\oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{\Pi} d\tau.$$

Cette énergie correspond à l'énergie nette gagnée par le volume V lors du passage de l'onde acoustique pendant un temps dt . Ce transfert net d'énergie se traduit par une variation d'énergie cinétique et/ou potentielle dans le volume, on peut donc écrire le bilan d'énergie suivant :

$$\iiint_V (e_c(t+dt) - e_c(t) + e_p(t+dt) - e_p(t)) d\tau + \iiint_V \text{div } \vec{\Pi} d\tau dt = 0. \quad (2)$$

En l'absence d'onde, on suppose que l'énergie de ce volume est constante, et que cette constante est prise égale à 0 ; ceci nous permet d'écrire la conservation de l'énergie sous forme locale :

$$\boxed{\text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial(e_c + e_p)}{\partial t} = 0}$$

Sous forme globale (à l'échelle du volume V), on peut écrire :

$$\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = - \oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

d) Les unités de puissance sonore

Définition : Intensité sonore.

On définit l'intensité sonore I comme la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting (vecteur densité surfacique de puissance sonore) :

$$I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle p_1 v_1 \rangle$$

Elle s'exprime en W.m^{-2} .

Le domaine de fréquences accessibles à l'oreille humaine s'étend sur environ 10 octaves de 20 Hz à 20 kHz (voir début du chapitre).

Les surpressions détectables par l'oreille humaine varient typiquement de 10^{-5} Pa à 100 Pa (son douloureux), couvrant ainsi plusieurs décades. Le *seuil d'audition* correspond à $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ ($p_1 = 2.10^{-5}$ Pa) et le *seuil de douleur* se situe à $I_{\text{douloureux}} \approx 1 \text{ W.m}^{-2}$ ($p_1 = 30$ Pa).

Définition : Niveau d'intensité sonore

Comme tous les récepteurs, l'oreille est un détecteur logarithmique. Nous allons donc définir le niveau d'intensité sonore L , exprimé en dB (décibels) comme

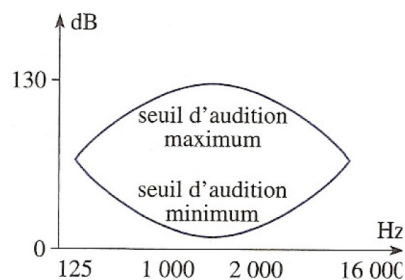
$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

où $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ est le seuil d'audition. Le niveau sonore du seuil d'audition est donc $L=0$ dB. Ici la fonction "log" représente le logarithme décimal.

Dans le tableau ci-dessous sont présentés quelques niveaux sonores.

Exemple	Niveau sonore L (en dB)
pièce silencieuse	30
lave-vaisselle	50
rue animée	75
scooter qui accélère	90
avion qui décolle	120
marteau-piqueur	130
boîte de nuit	130
fusée	180

Le *seuil de douleur* correspond à un niveau sonore $L = 120$ dB (car $I_{\text{douloureux}} = 1 \text{ W.m}^{-2}$). Ceci correspond à une surpression de 30 Pa, et à une vitesse du fluide maximale d'environ 75 mm.s^{-1} . On voit que pour ces sons "extrêmes" pour l'oreille, l'approximation acoustique est très largement vérifiée ($p_1 \ll 10^5 \text{ Pa}$ et $v_1 \ll c_s = 300 \text{ m.s}^{-1}$). Sur la figure ci-dessous est représenté le niveau sonore d'audition et de douleur dans le cas de l'oreille. Le seuil de douleur maximal est donc atteint pour une fréquence d'environ 1500 Hz, ce qui correspond approximativement à la note de musique "Sol₅". Pour le "La₃", qui est la note de référence pour accorder les instruments, la fréquence étant de 440 Hz, le seuil de douleur est plus faible. Pour une étude complémentaire des notes de musique, voir partie III.



3) Ondes acoustiques sphériques harmoniques

Lorsque le problème étudié est à symétrie sphérique ou cylindrique, il peut être difficile d'utiliser les ondes planes qui nécessitent une direction de propagation bien déterminée. Par exemple, l'étude des ondes acoustiques créées proches d'un haut-parleur sera impossible à l'aide d'ondes planes. On utilisera les **ondes sphériques harmoniques**.

On admet que l'expression d'une telle onde est de la forme :

$$\underline{\phi}(r, t)_+ = \underline{\phi}_{0,+} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$

où r est la distance entre le point étudié et l'origine de l'émission; $\underline{\phi}(r, t)_+$ diverge depuis la "source". Une onde sphérique harmonique convergente s'écrirait :

$$\underline{\phi}(r, t)_- = \underline{\phi}_{0,-} \frac{e^{i(kr + \omega t)}}{r}$$

Comment expliquer, par des arguments énergétiques, la décroissance en $\frac{1}{r}$ d'une onde sphérique ?

On va considérer une source d'onde acoustique située en $r = 0$, qui émet une onde acoustique avec la puissance $\mathcal{P}$ constante. On va négliger, comme précédemment, toute dissipation de l'onde ainsi créée. Cette source donne donc naissance à une onde sphérique divergente pour la vitesse et la surpression, notées respectivement $v(r, t)$ (orientée selon le vecteur $\vec{u}_r$) et $p(r, t)$ en coordonnées sphériques. Quel est le bilan de puissance acoustique associé à cette onde ?

Calculons le flux du vecteur de Poynting à travers une surface S . Cette surface est une sphère de rayon r centrée sur la source. Le vecteur $d\vec{S}$ qui oriente la surface est dirigé dans le même sens que $\vec{u}_r$, c'est-à-dire vers l'extérieur de la sphère, tout comme le vecteur de Poynting. On obtient alors :

$$\iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 p(r, t) v(r, t)$$

Or cette puissance est exactement égale à la puissance $\mathcal{P}$ fournie par la source, car il n'y a aucune perte. On obtient donc

$$\mathcal{P} = 4\pi r^2 p(r, t) v(r, t)$$

Pour que cette équation ne dépende plus de r , il faut donc imposer une dépendance en $\frac{1}{r}$ à $p(r, t)$ et $v(r, t)$.

4) Solutions en ondes stationnaires

Comme au chapitre précédent, il existe des solutions sous forme d'ondes stationnaires. À 1 dimension, en coordonnées cartésiennes, cela donne :

$$p_1(x, t) = A \cos(kx + \phi) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

utile dans les géométries confinées (cavités et tuyaux acoustiques). La donnée des CL permet d'obtenir les modes propres de vibration du tuyau (ou de la cavité) :

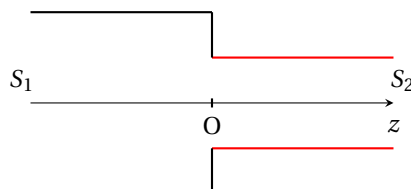
- Un tuyau *ouvert* sur l'atmosphère voit sa pression égale à P_0 : la surpression est alors nulle.
- Un tuyau *fermé* voit sa pression devenir extrémale (la vitesse du fluide est nulle).

III - Réflexion et transmission d'une onde acoustique

1) Présentation du problème

Dans la section précédente, nous avons vu que chaque milieu de propagation d'une onde acoustique possède une impédance acoustique. Dans cette partie, nous allons étudier le comportement d'une onde acoustique lorsqu'elle passe d'un milieu de propagation à un autre, par exemple de l'air vers l'eau, ou le comportement d'une onde acoustique dans un tuyau lorsqu'elle rencontre une modification de section. On ne considère que le cas de l'incidence normale.

Position du problème : on considère deux tuyaux d'axe Ox raccordés en $x = 0$. Le tuyau de gauche ($x < 0$) possède une section S_1 , la célérité des ondes acoustiques est notée c_1 , et toute grandeur caractéristique du fluide porte l'indice 1. Le tuyau de droite ($x > 0$) possède une section S_2 , la célérité des ondes acoustiques est notée c_2 , et toute grandeur caractéristique du fluide porte l'indice 2. Voir ci-dessous.



On considère une onde acoustique incidente venant de $x < 0$. En $x = 0$, deux autres ondes peuvent apparaître : une onde réfléchie vers $x < 0$ et une onde transmise vers $x > 0$. On note respectivement Z_1 et Z_2 les impédances acoustiques des milieux $x < 0$ et $x > 0$. Avec les OPPH, on pourra écrire :

- L'onde incidente est caractérisée par $v_i(x, t) = f_+(x - c_1 t) = v_{0i} \cos(k_1 x - \omega t)$;
la pression incidente s'exprimera donc : $p_i(x, t) = Z_1 v_{0i} \cos(k_1 x - \omega t)$, par définition de l'impédance acoustique dans le premier tuyau.
- L'onde réfléchie sera caractérisée par $v_r(x, t) = v_{0r} \cos(k_1 x + \omega t + \varphi)$;
la pression réfléchie s'exprimera donc $p_r(x, t) = -Z_1 v_{0r} \cos(k_1 x + \omega t + \varphi)$ dans le premier tuyau.
- L'onde transmise est caractérisée par $v_t(x, t) = v_{0t} \cos(k_2 x - \omega t + \phi)$;
la pression transmise s'exprimera donc : $p_t(x, t) = Z_2 v_{0t} \cos(k_2 x - \omega t + \phi)$ dans le second tuyau.

2) Conditions de continuité ; ondes à l'interface

a) Continuités :

Elles sont au nombre de 2 :

- **Continuité de la Pression** : il est évident que la pression *doit* être continue au niveau de l'interface, car il n'y a pas de séparation physique des deux tuyaux, notamment vers le centre (forces de pression qui se compensent de part et d'autre de l'interface). On impose donc :

$$P(x = 0^-, t) = P(x = 0^+, t) \quad \forall t$$

- **Continuité du débit de volume** : celui-ci doit également être continu, car sinon il y aurait accumulation (ou perte) de matière en $x = 0$. Cette condition peut s'exprimer sous la forme :

$$S_1 v_1(x = 0^-, t) = S_2 v_2(x = 0^+, t) \quad \forall t$$

b) Les diverses ondes à l'interface

À l'aide des conditions de continuité, il est possible de relier les différentes ondes au niveau. On peut tout d'abord exprimer la continuité de la pression :

$$p_i(0^-, t) + p_r(0^-, t) = p_t(0^-, t)$$

soit, en passant en complexes :

$$Z_1 (\underline{v}_{0i} - \underline{v}_{0r}) = Z_2 \underline{v}_{0t}$$

où $\underline{v}_{0i} = v_{0i}$, $\underline{v}_{0r} = v_{0r} e^{i\varphi}$ et $\underline{v}_{0t} = v_{0t} e^{i\phi}$.

La continuité du débit de volume donne :

$$S_1 (\underline{v}_{0i} + \underline{v}_{0r}) = S_2 \underline{v}_{0t}$$

3) Coefficients de réflexion et de transmission sous incidence normale

Définition :

Coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour la vitesse. Ils sont définis par :

$$\underline{r}_v = \frac{\underline{v}_{0r}}{\underline{v}_{0i}}$$

et

$$\underline{t}_v = \frac{\underline{v}_{0t}}{\underline{v}_{0i}}$$

On trouve alors, grâce aux deux relations de la partie précédente :

$$\underline{r}_v = \frac{\frac{Z_1}{S_1} - \frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}}$$

et

$$t_v = \frac{S_1}{S_2} \frac{2 \frac{Z_1}{S_1}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}}$$

De même, on peut définir les coefficients de réflexion et transmission pour la surpression, et on trouve :

$$r_p = -\frac{\frac{Z_1}{S_1} - \frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}} = -r_v$$

et

$$t_p = \frac{2 \frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}} = \frac{Z_2}{Z_1} t_v$$

Définition :

Coefficients de réflexion et transmission en puissance acoustique surfacique moyenne. Ils sont définis par :

$$R = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_r \cdot S_1 \vec{u}_x\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_i \cdot S_1 \vec{u}_x\| \rangle} = \frac{\langle p_r v_r \rangle}{\langle p_i v_i \rangle}$$

et

$$T = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_t \cdot S_2 \vec{u}_x\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_i \cdot S_1 \vec{u}_x\| \rangle} = \frac{S_2 \langle p_t v_t \rangle}{S_1 \langle p_i v_i \rangle}$$

Comme le vecteur de Poynting est un *produit* de p et v , **on ne peut pas** utiliser les expressions complexes. Toutefois, on peut utiliser le résultat suivant :

— VALEUR MOYENNE —

Il se trouve que le calcul de $\langle f(x, t).g(x, t) \rangle$ est possible en complexe via le résultat suivant :

$$\langle f(x, t).g(x, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{f}(x, t) \cdot \underline{g}(x, t)^* \right)$$

où $\underline{g}(x, t)^*$ est le complexe conjugué de $\underline{g}(x, t)$.

On peut alors calculer R :

$$R = \frac{\text{Re} \left(Z_1 \underline{v}_{0r} e^{i(kx+\omega t)} \cdot \underline{v}_{0r}^* e^{-i(kx+\omega t)} \right)}{\text{Re} \left(Z_1 \underline{v}_{0i} e^{i(kx-\omega t)} \cdot \underline{v}_{0i}^* e^{-i(kx-\omega t)} \right)} = \frac{|\underline{v}_{0r}|^2}{|\underline{v}_{0i}|^2} = \left[\frac{\frac{Z_1}{S_1} - \frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}} \right]^2$$

ainsi que T :

$$T = \frac{4 \frac{Z_1 \cdot Z_2}{S_1 \cdot S_2}}{\left[\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2} \right]^2}$$

Remarque :

$R + T = 1$, ce qui traduit la **conservation de l'énergie** : toute l'énergie incidente est soit réfléchi, soit transmise.

A RETENIR

Sous incidence normale, à l'interface entre deux milieux d'impédance acoustique respective Z_1 et Z_2 , (cas $S_1 = S_2$) :

- les coefficients de réflexion et de transmission de la vitesse valent

$$r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad t_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

- les coefficients de réflexion et de transmission de la surpression valent

$$r_p = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad t_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- les coefficients de réflexion et de transmission en énergie valent

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

4) Interprétation

a) Changement de surface de tuyau

Prenons l'exemple de deux tuyaux de section différente, mais les deux sections ont la même impédance acoustique : $Z_1 = Z_2$. dans ce cas, on obtient :

$$R = \left(\frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1} \right)^2$$

ce qui conduit à une réflexion très importante si S_2 est très différente de S_1 . Le cas $S_2 \ll S_1$ revient à fermer le tuyau au niveau de l'interface, ce qui ne transmet que très peu d'onde acoustique. L'autre cas $S_2 \gg S_1$ est plus intéressant : considérons un tuyau ouvert en $x = 0$ sur l'air ambiant. On peut voir cela comme deux tuyaux associés en $x = 0$, avec le deuxième tuyau qui possède une section bien supérieure à celle du premier (en réalité cette section est même infinie) ; en conséquence, la réflexion dans le tuyau 1 est là encore très importante. C'est la raison pour laquelle les instruments à vents ne se terminent pas subitement, mais possèdent au contraire une section qui augmente progressivement (c'est le pavillon) pour adapter les impédances du tuyau et de l'air libre, et ainsi diminuer le coefficient de réflexion.

b) Interface liquide/gaz et solide/gaz

La vitesse de propagation des ondes acoustiques dans les liquides et les gaz sont très différentes $c_s(\text{liquide}) > c_s(\text{gaz})$, comme sont très différentes les masses volumiques de ces deux états de la matière ($\rho(\text{liquide}) \gg \rho(\text{gaz})$), ce qui conduit à des impédances acoustiques très différentes. Il en est de même entre un solide et un gaz, où les différences sont encore plus grandes.

Le coefficient de réflexion $R_{\text{liquide/gaz}}$ entre un liquide et un gaz est donc très proche de 1. C'est donc la raison pour laquelle un plongeur entendra beaucoup mieux l'hélice d'un bateau tournant dans l'eau qu'un observateur placé sur la plage.

De même, le coefficient de réflexion $R_{\text{solide/gaz}}$ entre un solide et un gaz est très proche de 1, et le coefficient de transmission associé est très faible. C'est la raison pour laquelle un écho apparaît, où le son est réfléchi par les murs ou les parois des montagnes. Pour diminuer cet écho, on interpose entre l'air et le solide, des matériaux dont l'impédance est proche de celle de l'air pour que le son puisse être absorbé par la paroi.

De manière générale, pour améliorer la transmission d'une onde acoustique entre deux milieux d'impédance très différente, il va être nécessaire d'améliorer l'interface, par exemple en ajoutant un gel dont l'impédance est intermédiaire entre celle de l'air et celle de l'eau : c'est l'utilité du gel utilisé dans les échographies, pour permettre aux ultrasons de traverser la peau. Une autre solution pour améliorer la transmission est d'approcher le récepteur de l'interface : appareil à ultrasons collé au ventre, ou oreille collée à la montre pour entendre son "tic-tac".