

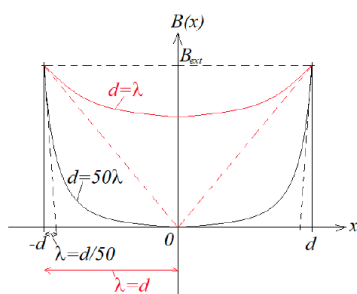
Tout résultat d'un calcul devra présenter le bon nombre de chiffres significatifs. La notation tiendra largement compte du soin apporté à la rédaction. Encadrer les résultats. Les deux problèmes sont à réaliser sur des copies différentes.

Problème 1 : l'effet Meissner

1. Induction : circuit électrique soumis à un flux magnétique variable (champ variable ou circuit mobile).
2. Ici : aimant permanent immobile, donc flux constant, donc pas d'induction.
3. $\vec{j} = \gamma \vec{E}$
4. Conducteur parfait : $\gamma \rightarrow \infty$ soit $\vec{E} = \vec{0}$
5. M-F : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$
6. $\vec{\mu} = I.S\vec{n}$
7. Aimant au-dessus du supra : $\vec{\mu} = \mu\vec{e}_r$, soit $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} 2\vec{\mu}$, soit, à une hauteur h : $B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi h^3} \approx 2 \text{ T}$
8. La force ressentie doit compenser le poids; avec la force donnée on trouve $I \approx 2 \text{ A}$.
9. $[\text{rot } \vec{j}] = j.L^{-1}$ et $B = \mu_0 n I$ (par exemple pour solénoïde), soit $[B] = [\mu_0].I.L^{-1}$, et on trouve $[\lambda] = L$
10. $\lambda = 16,8 \text{ nm}$
11. Immédiat, on utilise "rot(rot)" et M-A
12. La distribution de courant est invariante par translation suivant y et z , donc le champ ne dépend que de x ; le plan orthogonal à z est plan de symétrie pour la distribution de courant, donc $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan, d'où le résultat.
13. A 1d, l'équation devient : $\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{B}{\lambda^2}$, et si on pose $u = \frac{x}{\lambda}$, on a : $B''(u) - B = 0$, soit $B(u) = A\text{ch}(u) + C\text{sh}(u)$; les CL imposent $B(x = -d) = B(x = d) = B_{\text{ext}}$ d'où :

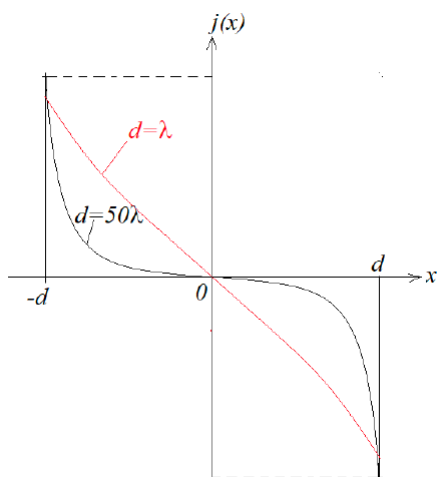
$$B(x) = B_{\text{ext}} \frac{\text{ch}(\alpha)}{\text{ch}(\beta)}$$

avec $\alpha = \frac{x}{\lambda}$ et $\beta = \frac{d}{\lambda}$.



14. Si λ diminue, le champ devient de + en + négligeable dans le supra, on peut imaginer $\lambda \ll d$
15. On a trouvé $\lambda = 10 \text{ nm}$; d'après la figure : $d = 1 \text{ cm}$, bien vérifié.
16. On utilise l'équation de London :

$$j(x) = \frac{-B_{\text{ext}}}{\mu_0 \lambda \text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \text{sh}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$



17.

Le courant est quasi surfacique pour $d = 50\lambda$

18. $j_s = \int_0^d j(x)dx$ et $I = 2\pi R j_s = 2\pi R \frac{B_{ext}}{\mu_0} \approx 2.10^2$ A $\gg$ valeur trouvée en 8. Il se crée une très forte intensité dans le supraconducteur pour expulser les lignes de champ de l'aimant et ainsi le faire léviter.

Problème 2 : Le synchrotron SOLEIL

1) Généralités

1. En électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$.

Notons que $\vec{E}$ est uniforme (il ne dépend pas des coordonnées d'espace) et unidirectionnel. Nous en déduisons que le potentiel ne dépend que de x . La relation demandée peut donc également se mettre sous la forme suivante : $\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{e}_x$.

La force qu'exerce le champ $\vec{E}$ sur l'électron s'écrit : $\vec{F} = -e\vec{E}$. Ainsi $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(-eV) = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$.

$\vec{F}$ est donc une force conservative dérivant de l'énergie potentielle $E_p(x) = -eV(x) + cste$.

2. Considérons le système électron évoluant dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen sur une distance d . Ce dernier est soumis à la force électrique conservative et à son poids négligé devant $\vec{F}$. Le système étant conservatif, l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m(t=0) = E_m(tf) \implies -eV(0) = E_c + -eV(d) \implies \Delta V = \frac{E_c}{e}$$

AN : $\Delta V = \frac{E_c}{e} = \frac{1e3V \times e}{e}$ ainsi $\Delta V = 1e3V$.

3. D'après l'expression de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m_e v^2$, nous obtenons $v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}}$.

AN : $v = \sqrt{\frac{2 \times 10^8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 5,9 \cdot 10^9 \text{ m.s}^{-1}$

Conclusion : la vitesse obtenue à l'aide du modèle classique ne convient pas.

4. D'après l'énoncé $E_c = (\gamma - 1)m_e v^2$ ainsi $\gamma = \frac{E_c}{m_e c^2} + 1$.

AN : $\gamma \approx 2.10^2$

5. L'intensité du courant i , est défini par la quantité de charges traversant une section de l'anneau par unité de temps. Il nous faut donc évaluer le nombre d'électrons traversant cette section par unité de temps.

Chaque électron possède une vitesse proche de celle de la lumière. Il parcourt donc l'anneau en un temps T tel que $T = \frac{2\pi R}{c}$.

Nous en déduisons alors l'expression de l'intensité du courant $i = \frac{Ne}{T} = \frac{Nec}{2\pi R}$. Le nombre d'électrons constituant le

faisceau est : $N = \frac{2\pi R i}{ec}$.

AN : $N = \frac{2 \times 3,14 \times 57 \times 0,43}{1,6e-19 \times 3 \cdot 10^8} \approx 3 \cdot 10^{12}$

6. Le modèle du gaz parfait pour un nombre N de particules s'écrit : $PV = \frac{N}{N_A}RT$.

n la densité particulaire, à savoir le nombre de particules par unité de volume, s'écrit sous la forme suivante : $n = \frac{PN_A}{RT}$.

AN : $n = \frac{6 \cdot 10^{-8} \times 6,0 \cdot 10^{23}}{8,31 \times 298} \approx 1 \cdot 10^{13}$

7. Réalisons un bilan d'homogénéité sur la relation proposée : $dN = -\sigma \cdot n \cdot N \cdot dx$. Soit $[\sigma] = \frac{[dN]}{[n \cdot N \cdot dx]} = L^2$

En effet N et dN sont sans dimension alors que n est homogène à L^{-3} . Nous constatons que σ est homogène à une surface d'où son nom de section efficace.

8. Déterminons l'évolution de N en fonction de x .

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = - \int_0^x \sigma n dx \implies \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\sigma n x$$

Notons que la vitesse des électrons est c . Ainsi $x = ct$, il vient alors que $\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\sigma n ct$.

Au temps τ , le nombre d'électrons présents est $N(\tau) = \frac{100-37}{100} N_0 = 0,63 N_0$.

Le temps τ se trouve à l'aide de la relation suivante : $\tau = -\frac{1}{\sigma n c} \ln(0,63)$

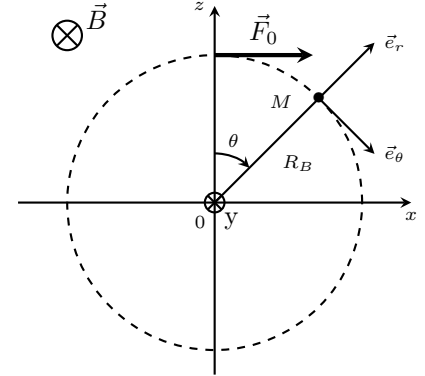
9. à l'aide des données : $\tau = -\frac{0,46}{2,0 \cdot 10^{-27} \times 1,10^{13} \times 3,10^8} \approx 8,10^4 \text{ s} = 2,10^1 \text{ h}$

Notons que la décroissance de l'intensité du courant est relativement lente. Et, pour maintenir le courant constant, on peut ajouter régulièrement des électrons dans le synchrotron.

2) Éléments magnétiques

10. Le champ magnétique peut se mesurer à l'aide d'un teslamètre (ou sonde à effet Hall).
11. Nous étudions l'évolution de l'électron dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_0(O, x, y, z)$ supposé galiléen. L'électron est soumis à un champ magnétique uniforme et permanent colinéaire à l'axe (Oy) . Ceci est à l'origine de la force magnétique $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$. à l'instant $t = 0$, cette force est colinéaire à l'axe (Ox) ($\vec{F}_0 = -ev_0\vec{e}_z \wedge B_0\vec{e}_y = +ev_0B_0\vec{e}_x$).

La trajectoire de l'électron est donc un cercle de rayon R_B inscrit dans le plan (O, x, z) . Nous adopterons comme base de projection $(\vec{e}_r; \vec{e}_\theta; \vec{e}_y)$ définie sur le schéma ci-contre.



Définissons les grandeurs caractéristiques de l'électron dans $\mathcal{R}_0$:

- le vecteur position : $\vec{OM} = R_B\vec{e}_r$;
- sa vitesse : $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_0} = R_B\dot{\theta}\vec{e}_\theta$;
- sa quantité de mouvement $\vec{p}(M)_{\mathcal{R}_0} = mR_B\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Ainsi la norme de la quantité de mouvement s'écrit $p = mR_B|\dot{\theta}|$.
- son accélération : $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_0} = -R_B\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R_B\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.

L'électron est donc soumis à la force magnétique $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -eB_0R_B\dot{\theta}\vec{e}_r$ et à son poids négligeable devant $\vec{F}$. Nous pouvons alors écrire le principe fondamental de la dynamique projeté sur $\vec{e}_r$:

$$-mR_B\dot{\theta}^2 = -eB_0R_B\dot{\theta} \Rightarrow m\dot{\theta} = eB_0$$

Deux conséquences à cette relation : $\dot{\theta}$ est positif et $p = mR_B\dot{\theta} = eB_0R_B$.

Conclusion : nous retrouvons la relation proposée $B_0 = \frac{p}{eR_B}$.

De plus, la pulsation de rotation de l'électron sur sa trajectoire circulaire s'écrit $\omega_B = \dot{\theta} = \frac{eB_0}{m}$.

12. D'après l'énoncé $B_0 = \frac{p}{eR_B} \approx \frac{E_c}{ceR_B}$. AN : $B_0 = \frac{2,7 \cdot 10^9 \cdot e}{e \times 3,10^8 \times 5,4} \approx \frac{3,10^9}{3,10^8 \times 5} \approx 2 \text{ T}$.

13.
 - o Le plan (xOy) est un plan d'anti-symétrie pour la distribution de courants. Ainsi en tout point M de ce plan, le champ magnétique est contenu dans ce plan :

$$\forall M \in (xOy), \vec{B}(M) \in (xOy).$$

- o Le plan (xOz) est un plan de symétrie pour la distribution de courants. Ainsi en tout point M de ce plan, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan :

$$\forall M \in (Ox), \vec{B}(M) \perp (Ox).$$

- o Le plan (yOz) est un plan de symétrie pour la distribution de courants. Ainsi en tout point M de ce plan, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan :

$$\forall M \in (Oy), \vec{B}(M) \perp (Oy).$$

- o Notons que O est élément de (Ox) et (Oy) ainsi $\vec{B}(O)$ est à la fois perpendiculaire à (Ox) et (Oy) . La seule solution acceptable est $\vec{B}(O) = \vec{0}$.

14. Le champ magnétique doit vérifier les équations de Maxwell en régime stationnaire. Celles liées au champ magnétique sont :

- o Maxwell Thomson : $\text{div} \vec{B} = 0$.
Notons qu'en coordonnées cartésiennes :

$$\text{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial (Ky + K')}{\partial x} + \frac{\partial (Kx + K')}{\partial y} = 0$$

- Maxwell Ampère : $\rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Or en tout point M au voisinage de l'origine $\vec{j} = \vec{0}$. Soit en coordonnées cartésiennes :

$$\rightarrow \text{rot} \vec{B} = -\frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial B_x}{\partial z} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = (K - K) \vec{e}_z = \vec{0}$$

- Le champ magnétique est nul en O : $\vec{B}(O) = K' \vec{e}_x + K' \vec{e}_y = \vec{0}$. Cela implique $K' = 0$.

15. Le champ magnétique en A s'écrit $\vec{B}(A) = \frac{K \Delta y}{2} \vec{e}_x$.

$$\text{Ainsi } \vec{F}(A) = -e (v_0 \vec{e}_z) \wedge \left(\frac{K \Delta y}{2} \vec{e}_x \right) = -\frac{ev_0 K \Delta y}{2} \vec{e}_y.$$

$$\text{Nous obtenons } \vec{F}(A) \cdot \vec{e}_y < 0.$$

$$\text{Le champ magnétique en } B \text{ s'écrit } \vec{B}(B) = -\frac{K \Delta y}{2} \vec{e}_x.$$

$$\text{Ainsi } \vec{F}(B) = \frac{ev_0 K \Delta y}{2} \vec{e}_y. \text{ Nous obtenons } \vec{F}(B) \cdot \vec{e}_y > 0.$$

Les forces ramènent les électrons vers l'origine. Le faisceau est ainsi refocalisé.

16. De la même façon que précédemment, déterminons le champ magnétique et la force agissant sur l'électron aux points $C \left(\frac{\Delta x}{2}, 0, 0 \right)$ et $D \left(-\frac{\Delta x}{2}, 0, 0 \right)$.

$$\text{Le champ magnétique en } C \text{ s'écrit } \vec{B}(C) = \frac{K \Delta x}{2} \vec{e}_y.$$

$$\text{Ainsi } \vec{F}(C) = -e (v_0 \vec{e}_z) \wedge \left(\frac{K \Delta x}{2} \vec{e}_y \right) = \frac{ev_0 K \Delta x}{2} \vec{e}_x.$$

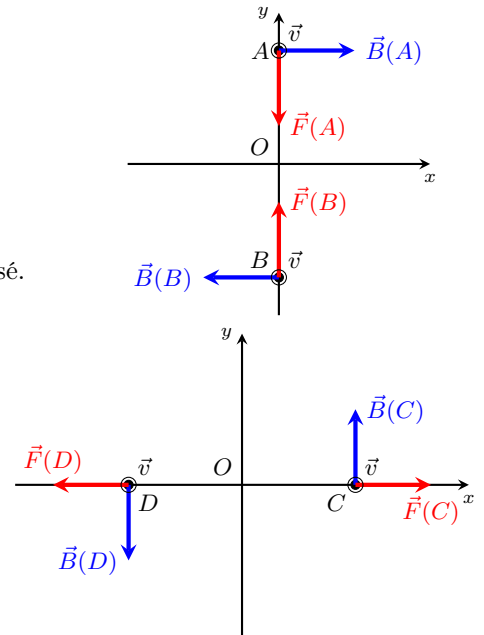
$$\text{Nous obtenons } \vec{F}(C) \cdot \vec{e}_x > 0.$$

$$\text{Le champ magnétique en } D \text{ s'écrit } \vec{B}(D) = -\frac{K \Delta x}{2} \vec{e}_y.$$

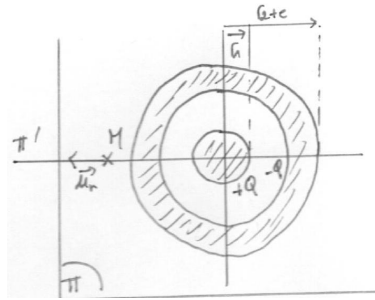
$$\text{Ainsi } \vec{F}(D) = -\frac{ev_0 K \Delta x}{2} \vec{e}_x.$$

$$\text{Nous obtenons } \vec{F}(D) \cdot \vec{e}_x < 0.$$

Les forces éloignent les électrons de l'origine. Le faisceau tend donc à s'évaser. Pour le refocaliser, il est donc nécessaire d'avoir un second quadripôle générant un champ magnétique opposé. Pour cela il suffit de placer un second quadripôle pivoter de $\pi/2$.



Problème 3 : câble coaxial



1.

$$\left. \begin{array}{l} (\Pi) \text{ et } (\Pi') \text{ sont plans de symétrie donc } \vec{E} = E \vec{u}_r \\ \text{Il y a invariance par } T(z) \text{ et } R(\theta) \text{ d'où } \vec{E} = \vec{E}(r) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

2. Nous avons affaire à une distribution surfacique, si on prend comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur ℓ on a :

$$\iint_{\Sigma_g} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{int}} / \varepsilon \Leftrightarrow E \cdot 2\pi r \ell = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon}$$

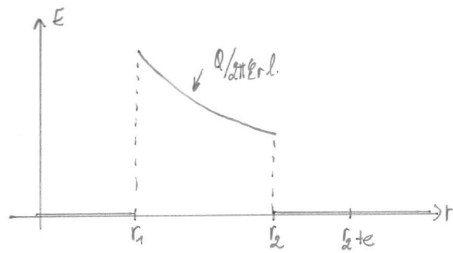
$$\text{Donc, si } r < r_1 : q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \vec{E}(r < r_1) = \vec{0}$$

$$\text{si } r_1 < r < r_2 : q_{\text{int}} = Q \Rightarrow \vec{E}(r_1 < r < r_2) = \frac{Q}{2\pi \varepsilon r \ell} \vec{u}_r$$

$$\text{si } r_2 < r < r_2 + e : q_{\text{int}} = Q - Q = 0 \Rightarrow \vec{E}(r_2 < r < r_2 + e) = \vec{0}$$

3. De même pour $r > r_2 + e$, $q_{\text{int}} = Q - Q = 0 \Rightarrow \vec{E}(r > r_2 + e) = \vec{0}$

4. Tracé



5. On a discontinuité de $E(r)$ car on traverse des densités surfaciques :

$$\begin{aligned}
 -\text{en}r_1 : \vec{E}(r_1^+) - \vec{E}(r_1^-) &= \frac{Q}{2\pi l r_1} \vec{u}_r = \frac{\sigma_1 \times 2\pi r_1 l}{2\pi \xi l r_1} \\
 \Leftrightarrow \Delta \vec{E} &= \frac{\sigma_1}{\xi} \vec{\mu}_r \\
 -\text{en}r_2 : \vec{E}(r_2^+) - \vec{E}(r_2^-) &= \frac{-Q}{2 + tl r_1} \vec{v}_r \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \frac{-\sigma_2}{\xi} \vec{\mu}_r
 \end{aligned}$$

1.4) Soit $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ d'où $dV = -E dr$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow V_1 - V_2 &= - \int_{r_2}^{r_1} \frac{Q}{2\pi k r l} dr \\
 \Rightarrow V_1 - V_2 &= \frac{Q}{2\pi k l} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)
 \end{aligned}$$

6. Soit $Q = CU_{12} \Rightarrow C = \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln(r_2/r_1)}$

D'où per unité de longueur : $C_1 = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln(I_2/I_1)}$

7. Soit $W_e = \frac{1}{2} CU_{12}^2 = \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \left(\frac{Q}{2\pi \varepsilon l} \right)^2 \left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right)^2$

$$\Leftrightarrow W_e = \frac{Q^2}{2\pi \varepsilon l} \ln(r_2/r_1)$$

8. On a $C_1 = 92,4 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

9. Et : $W_e = \frac{1}{2} G_1 U_{12}^2 = 4,6210^{-9} \text{ J}$