

Tout résultat d'un calcul devra présenter le bon nombre de chiffres significatifs. La notation tiendra largement compte du soin apporté à la rédaction. Encadrer les résultats. Les trois problèmes sont à réaliser sur des copies différentes.

CALCULATRICE INTERDITE

Problème 1 : l'effet Meissner

Une onde électrique est soumise à de nombreux phénomènes dissipatifs lorsqu'elle transporte de l'énergie, ce qui engendre des pertes entre la centrale électrique et le lieu d'utilisation. De nombreux dispositifs sont mis en place pour limiter ces pertes mais elles existent toujours. En 1911, Heike Kamerlingh Onnes, physicien néerlandais, et son équipe ont montré que la résistance électrique du mercure devient rigoureusement nulle en-dessous d'une certaine température, appelée température critique T_C . On parle alors de supraconducteur. Ces travaux lui valurent le prix Nobel de physique en 1913. Ces derniers ont une température critique qui varie en fonction leurs propriétés.

Lorsqu'un matériau supraconducteur est soumis à un champ magnétique uniforme, le supraconducteur expulse les lignes de champ magnétique. On parle d'effet Meissner.

DONNÉES

- Masse d'un électron : $m = 9.10^{-31}$ kg ;
- Charge élémentaire : $e = 2.10^{-19}$ C ;
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1.10^{-6}$ H.m⁻¹
- Constante de Planck : $h = 7.10^{-34}$ J.s
- Rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z \\ \partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x \\ \partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y \end{pmatrix}$$

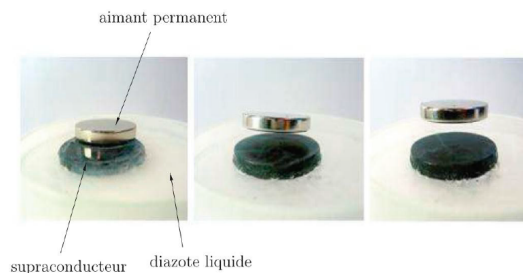
- Formule du double produit vectoriel :

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}$$

- Cosinus hyperbolique : $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Sinus hyperbolique : $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

1) Comparaison avec l'électromagnétisme classique

On se propose de réaliser une expérience mettant en évidence ce phénomène (figure ci-dessous). On pose un aimant permanent sur un matériau supraconducteur. On fait alors baigner le supraconducteur dans du diazote liquide pour abaisser sa température en-dessous de sa température critique. Il devient alors supraconducteur et se met à rejeter les lignes de champ magnétique de l'aimant : le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur devient nul et l'aimant se met alors à léviter.



D'un point de vue microscopique, le supraconducteur crée des courants électriques qui s'opposent complètement à ce champ magnétique.

1. En l'absence de supraconduction et de basses températures, à quelle condition peut-on observer un phénomène d'induction ?
2. Au vu de l'expérience proposée, quelle est la différence fondamentale avec le phénomène d'induction évoqué à la question 1.

L'effet Meissner ne peut pas être décrit en utilisant la théorie électromagnétique classique.

Cependant, d'un point de vue purement électrique, le supraconducteur présente une résistance électrique rigoureusement nulle et ressemble donc à un conducteur électrique parfait.

Dans les questions 3. à 5., on s'intéresse à un conducteur électrique de conductivité γ , soumis un champ électrique $\vec{E}$.

3. Rappeler la loi d'Ohm locale.
4. Qu'appelle-t-on conducteur parfait ? Que peut-on en déduire sur le champ électrique en son sein ?
5. À partir d'une des équations de Maxwell, en déduire que le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du conducteur parfait est forcément un champ stationnaire.

On se propose de modéliser le supraconducteur par une boucle de courant circulaire de rayon R , parcourue par un courant d'intensité I . On veut estimer l'ordre de grandeur de l'intensité I nécessaire pour faire léviter l'aimant d'une hauteur h , estimée d'après la figure ci-dessus.

6. Donner l'expression du moment magnétique $\vec{\mu}$ de la boucle de courant.

En présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, la boucle de courant va subir une force

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

L'aimant permanent possède un moment magnétique $M_1 = 10 \text{ A.m}^2$; on donne l'expression du champ créé par un moment magnétique $\vec{M}$ à une distance $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ de son centre : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3 \left(\vec{M} \cdot \vec{e}_r \right) \vec{e}_r - \vec{M} \right]$

7. Exprimer l'ordre de grandeur du champ magnétique créé par l'aimant ressenti au niveau du supraconducteur (on prendra $4\pi \approx 10$).
8. Estimer par un raisonnement simple l'ordre de grandeur de l'intensité I nécessaire pour observer la lévitation à une hauteur h de l'aimant de la photo. On prendra une masse de 40 g pour l'aimant permanent.

2) Champ magnétique dans le supraconducteur

Pour expulser le champ magnétique, ce dernier doit être rigoureusement nul dans le supraconducteur contrairement à un conducteur parfait où on a seulement un champ stationnaire, *a priori* non nul d'après 5.

Pour expliquer cette différence, les frères London (1935) ont postulé que les électrons dans un supraconducteur ne suivent pas les mêmes lois que ceux du conducteur parfait. Ils montrèrent que la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans le supraconducteur s'écrit

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B}$$

avec $\vec{B}$ le champ magnétique dans le supraconducteur, λ une constante telle que $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$ où m est la masse de l'électron, n la densité d'électrons supraconducteurs, e la charge de l'électron et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

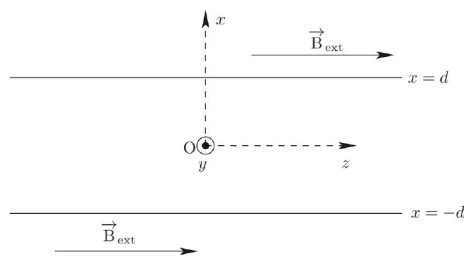
9. Montrer que λ est homogène à une longueur.
 10. Déterminer la valeur numérique de λ pour $n = 10^{29} \text{ m}^{-3}$.
- Dans toute la suite de cette partie, on se place en régime permanent.

11. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le champ magnétique $\vec{B}$ dans le supraconducteur s'écrit alors

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

On s'intéresse maintenant à un supraconducteur d'épaisseur $2d$ selon la direction (Ox) et infini selon (Oy) et (Oz) . On choisit l'origine du repère orthonormé direct $(Oxyz)$ au milieu de plaque.

La face supérieure (respectivement inférieure) se situe en $x = d$ (respectivement $x = -d$). Cette plaque est plongée dans un champ magnétique qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme tel que $\vec{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}} \vec{e}_z$. On supposera que le champ magnétique est continu au niveau de chaque interface $x = \pm d$. Le système est représenté ci-dessous



12. Montrer que le champ magnétique dans le supraconducteur est de la forme $\vec{B} = B(x)\vec{e}_z$
13. Pour une équation différentielle du type $f'' - f = 0$, les solutions générales peuvent se mettre sous la forme $f(\xi) = A\text{ch}(\xi) + C\text{sh}(\xi)$ où ch et sh sont respectivement les cosinus et sinus hyperbolique rappelés en données. Résoudre l'équation différentielle de la question 11. et établir que

$$B(x) = B_{\text{ext}} \frac{\text{ch}(\alpha)}{\text{ch}(\beta)}$$

avec α et β des expressions à déterminer en fonction de x , d et λ .

14. Tracer l'allure de $B(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. En déduire à quelle condition sur d le champ magnétique moyen peut être considéré comme nul à l'intérieur du supraconducteur (effet Meissner).
15. À partir de l'expérience de la partie 1) (photo) et de la question précédente, vérifier si la condition précédente est bien vérifiée.
16. Calculer l'expression littérale du vecteur densité de courant $\vec{j} = j(x)\vec{e}_y$
17. Tracer $j(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. Pour $d = 50\lambda$, comment peut-on qualifier la densité de courant dans le supraconducteur ?
18. Estimer l'intensité du courant dans le supraconducteur pour un champ magnétique extérieur de 5.10^{-3} T. Comparer cette valeur à celle de la question 8. Conclure.

Problème 2 : Synchrotron SOLEIL

Un synchrotron est un instrument électromagnétique de grande taille destiné à l'accélération de particules chargées. Le rayonnement synchrotron est un rayonnement électromagnétique émis par une particule chargée possédant une accélération. Ce rayonnement est utilisé pour des analyses physiques.

Dans le synchrotron SOLEIL, situé à Saclay, des électrons, de masse notée m_e et de charge $-e$, accélérés à une vitesse proche de celle de la lumière, sont déviés par des champs magnétiques.

Le problème étudie quelques ordres de grandeurs liés au synchrotron SOLEIL. Il est constitué de 2 parties qui peuvent être résolues de manière indépendante les unes des autres. Après la partie 1) qui traite de généralités, la partie 2) étudie la déviation des électrons.

Le schéma général du synchrotron SOLEIL est rapporté figure 1.

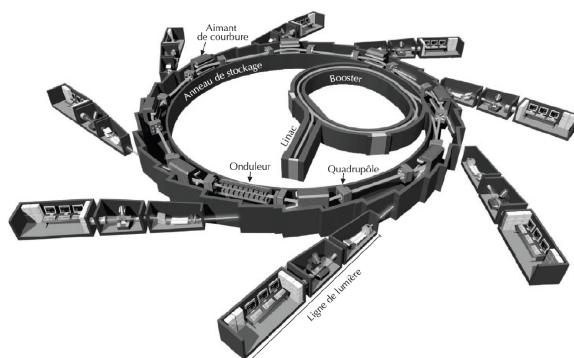


FIGURE 1 – Schéma général du synchrotron SOLEIL (d'après *Reflets de la Physique* n° 34-35)

Données	
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 5,110^2 \text{ keV}/c^2$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Valeur de l'électron-volt	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Constante de Planck	$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante molaire des gaz parfaits	$R = 8,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Bien que ces données soient fournies avec deux chiffres significatifs, les résultats numériques calculés seront fournis, sauf indication contraire, avec UN SEUL chiffre significatif.

1) Généralités

Des électrons non-relativistes, émis sans vitesse initiale, sont accélérés linéairement par un champ électrostatique uniforme et unidirectionnel $\vec{E} = E\vec{e}_x$.

- Q1.** Rappeler la relation qui lie le champ électrostatique au potentiel électrostatique V . En déduire l'énergie potentielle électrostatique de l'électron en fonction de e et de V .
- Q2.** Calculer la différence de potentiel nécessaire pour obtenir une énergie cinétique finale $E_c = 1,0 \text{ keV}$. Justifier.
- Q3.** Dans la zone nommée Linac du synchrotron SOLEIL (**figure 1**), les électrons sont accélérés jusqu'à une énergie cinétique $E_c = 100 \text{ MeV}$. Vérifier que leur vitesse v ne peut plus alors être calculée à l'aide de la forme de l'énergie cinétique utilisée en mécanique classique.
- Q4.** Les électrons étant relativistes, leur énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = (\gamma - 1) m_e c^2$$

où $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ est le facteur de Lorentz de l'électron. Calculer ce facteur.

Les électrons sont ensuite accélérés jusqu'à $E_c = 2,7 \text{ GeV}$ grâce à un autre accélérateur nommé booster, puis libérés dans l'anneau de stockage. Leur vitesse est alors assimilable à celle de la lumière.

- Q5.** L'intensité du courant circulant dans l'anneau de stockage, assimilé à un cercle de rayon $R = 57 \text{ m}$, vaut à un instant donné $i = 0,43 \text{ A}$. Exprimer, puis calculer le nombre d'électrons N constituant le faisceau.
- Q6.** Le vide dans l'anneau de stockage n'est pas parfait ; il subsiste principalement du dihydrogène, sous une pression $P = 6 \cdot 10^{-13} \text{ bar}$. En utilisant un modèle connu, calculer la densité particulaire n du gaz résiduel à $T = 298 \text{ K}$.

Les chocs entre les N électrons d'un faisceau et les molécules de gaz résiduel fait varier le nombre d'électrons du faisceau. Pour une longueur dx de parcours, cette variation s'écrit :

$$dN = -\sigma \cdot n \cdot N \cdot dx$$

- Q7.** Justifier dimensionnellement le nom de "section efficace" donné au coefficient σ .
- Q8.** En raison de ces chocs, le faisceau a une durée de vie τ , définie comme la durée pour laquelle le nombre N d'électrons a diminué de 37%. Exprimer τ en fonction de σ, n et de c .
- Q9.** On considère $\sigma = 2,0 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^2$ dans le synchrotron. Calculer la durée de vie du faisceau. On donne $\ln(0,63) = -0,46$. Expliquer comment l'intensité du faisceau peut rester constante.

2) Éléments magnétiques

L'anneau de stockage n'est pas rigoureusement circulaire : il est constitué de portions linéaires et d'éléments magnétiques qui sont des dipôles, des quadripôles et des sextupôles.

- Q10.** Expliquer comment on peut mesurer un champ magnétique au laboratoire.

Les dipôles sont des aimants servant à courber la trajectoire des électrons. On considère une base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Un dipôle crée un champ magnétique vertical supposé uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$, avec $B_0 > 0$.

- Q11.** On considère un électron non relativiste pénétrant avec une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_z$, avec $v_0 > 0$, dans une zone où règne le champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$. En admettant que la trajectoire est circulaire de rayon R_B , montrer que :

$$B_0 = \frac{p}{eR_B} \quad (1)$$

où p est la norme de la quantité de mouvement de l'électron.

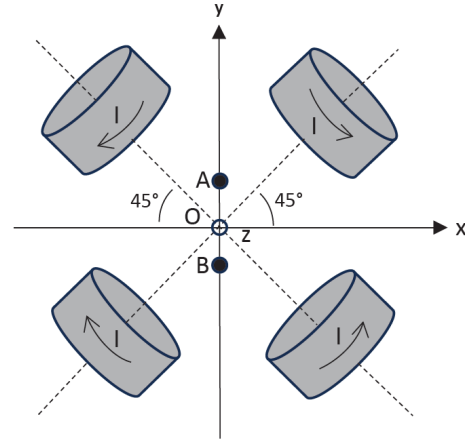
Exprimer la pulsation de rotation ω_B de l'électron sur sa trajectoire.

- Q12.** La relation (1) reste valable dans le cadre de la relativité restreinte, avec une norme de la quantité de mouvement voisine de $p \approx \frac{E_c}{c}$. Calculer la valeur du champ magnétique permettant d'obtenir un rayon $R_B = 5,4$ m pour la trajectoire. On rappelle que dans l'anneau de stockage $E_c = 2,7$ GeV.

Les inhomogénéités de vitesse du paquet d'électrons entraînent une divergence du faisceau d'électrons, qui doit donc être focalisé. On utilise pour cela des quadrupôles, composés de quatre bobines disposées en carré (**figure 2**).



(a) Quadrupôle, d'après Reflets de la physique n°34



(b) Schématisation des distributions de courants (en pointillés les axes des bobines; les flèches donnent le sens des courants)

FIGURE 2

- Q13.** Expliquer pourquoi le champ en un point du plan xOy de la **figure 2b** est contenu dans ce plan. Donner la direction et le sens du champ au voisinage de l'origine :

- sur l'axe Ox ;
- sur l'axe Oy .

Donner la valeur du champ à l'origine des coordonnées. On justifiera les réponses.

Le champ magnétique créé par les quatre bobines peut s'écrire au voisinage de l'origine :

$$\vec{B} = (Ky + K')\vec{e}_x + (Kx + K')\vec{e}_y \text{ avec } K \text{ et } K' \text{ constantes.}$$

- Q14.** Rappeler les deux équations locales vérifiées par le champ magnétique en régime stationnaire et montrer que le champ proposé vérifie ces équations. Donner la valeur de K' .

- Q15.** On suppose $K > 0$. On considère un faisceau d'électrons de vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_z$ avec $v_0 > 0$, possédant une faible extension Δy autour de l'origine. Sur un schéma, dessiner le champ magnétique et la force exercée sur un électron aux points $A(0, \Delta y/2, 0)$ et $B(0, -\Delta y/2, 0)$ (**figure 2b**). En déduire que le faisceau est refocalisé au voisinage de l'origine grâce au quadrupôle.

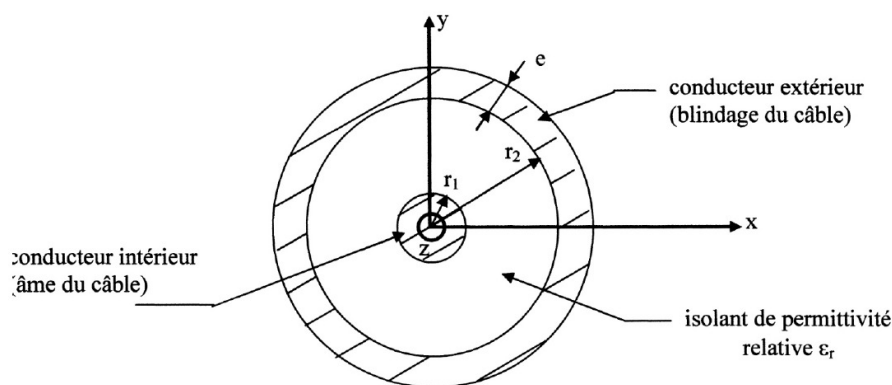
- Q16.** Montrer qu'un faisceau d'électrons possédant une extension Δx autour de l'origine sera cette fois défocalisé. Expliquer comment on peut disposer deux quadrupôles successifs pour pallier cet inconvénient.

Le dispositif magnétique est complété par un sextupôle non étudié servant à corriger la trajectoire du faisceau électronique.

Problème 3 : Cable coaxial

Un câble coaxial est constitué par deux cylindres coaxiaux parfaitement conducteurs, de même axe Oz et de rayons respectifs r_1 , r_2 et $(r_2 + e)$, et de longueur ℓ . La longueur de la ligne ℓ est assez grande devant r_1 et r_2 pour que l'on puisse négliger les effets de bords : on considère que les symétries et invariances sont les mêmes que si la longueur ℓ était infinie.

L'espace entre les deux conducteurs contient un isolant, homogène et isotrope de permittivité relative $\varepsilon_r = 2,0$. On rappelle que la permittivité absolue ε de l'isolant est liée à sa permittivité relative par la relation $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, la notation ε_0 désignant la permittivité absolue du vide. L'isolant se comporte alors comme le vide à condition de remplacer dans toutes les égalités ε_0 par ε .



Pour les applications numériques, on prendra : $r_1 = 0,15$ cm, $r_2 = 0,50$ cm, $\ell = 10$ m, $e = 0,10$ cm, $\mu_0 = 1.10^{-6}$ H.m⁻¹, $\epsilon_0 = 1.10^{-11}$ F.m⁻¹.

Le conducteur intérieur est porté au potentiel V_1 constant et le conducteur extérieur au potentiel V_2 , qu'on suppose nul. Les conducteurs, en équilibre électrostatique, portent alors respectivement les charges électriques $+Q$ et $-Q$, supposées uniformément réparties sur les deux surfaces des conducteurs qui sont de rayon r_1 et r_2 .

1. Montrer que le champ électrique est radial et que sa norme ne dépend que de r , soit $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.
2. (a) Établir l'expression de $E(r)$ en fonction de Q , de la permittivité ϵ de l'isolant, de r et de ℓ , en distinguant trois cas : $r < r_1$, $r_1 < r < r_2$ et $r_2 < r < r_2 + e$. Il est rappelé que l'expression de $E(r)$ demandée se déduit de celle obtenue dans le cas d'un câble coaxial "à vide" en remplaçant la permittivité absolue ϵ_0 du vide par celle, ϵ du matériau isolant.
 (b) Montrer que dans le domaine $r > r_2 + e$, $E(r) = 0$.
3. (a) Tracer le graphe de $E(r)$
 (b) Commenter physiquement les éventuelles discontinuités de $E(r)$ à la traversée des cylindres de rayon r_1 , r_2 et $(r_2 + e)$.
4. Exprimer la tension $U_{12} = V_1 - V_2$ en fonction de Q , ϵ , ℓ , r_1 et r_2 .
5. Montrer que la capacité par unité de longueur du câble coaxial, notée C_1 est donnée par :

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

6. En déduire simplement l'expression de l'énergie électrostatique W_e emmagasinée par le câble coaxial de longueur ℓ .
7. Calculer la valeur numérique de C_1 . On prendra $\pi = 3$ et $\ln\left(\frac{0,50}{0,15}\right) \approx 1$
8. Calculer la valeur numérique de W_e pour une tension $U_{12} = 10$ V entre les armatures du câble.

FIN DE L'ÉNONCÉ