

Introduction

Si un grand nombre de problèmes physiques sont solutions de l'équation de D'Alembert, permettant ainsi la propagation d'un signal de forme quelconque sans déformation, cette équation n'est pas universelle en physique des ondes : on a déjà rencontré, par exemple, l'équation de diffusion. Le but de ce chapitre est de généraliser l'étude de la physique des ondes aux équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants.

L'étude s'appuie sur des exemples variés empruntés aux domaines de la mécanique ou de l'électromagnétisme. Elle est menée sur des ondes harmoniques planes en représentation complexe. Toutefois, les ondes obtenues n'ont en général aucun caractère physique car elles sont soit d'extension temporelle infinie, soit d'extension spatiale infinie. Pour étudier des ondes réelles solutions d'une EDP linéaire à coefficients constants, on aura recours au principe de superposition.

Le formalisme utilisé nous permettra d'aborder la question de la propagation des ondes EM non plus seulement dans le vide mais dans les milieux matériels, comme par exemple un métal ou un plasma dilué.

Table des matières

I - Dispersion et absorption	1
1) 1 exemple pour commencer : chaîne de pendules couplés	1
2) OPPH généralisées	3
3) Contenu physique de la relation de dispersion	3
II - Paquets d'onde	5
1) Position du problème ; signal comportant 2 pulsations voisines	5
2) Notion de paquet d'onde	5
3) Propagation du paquet d'ondes ; vitesse de groupe	6
III Ondes EM dans un conducteur	7
1) Equation de propagation	7
2) Effet de peau	8
3) Aspects énergétiques	9
IV - Onde dans un plasma dilué	10
1) Interaction entre une OPPH et un plasma	10
2) Conductivité complexe du plasma	10
3) Équation de propagation dans le plasma	11
4) Relation de dispersion et forme des solutions	11
5) Aspects énergétiques	13
6) L'ionosphère, un exemple de plasma dilué.	13
V - Réflexion et transmission d'une onde EM entre deux milieux	14
1) Position du problème	14
2) Coefficients de réflexion et transmission en amplitude	15
3) Coefficients de réflexion et transmission en puissance entre deux DLHI	16

I - Dispersion et absorption

1) 1 exemple pour commencer : chaîne de pendules couplés

On considère une chaîne de pendules placés à une distance a les uns des autres sur un axe Δ , orienté par le vecteur $\vec{u}_x$ et astreints à se déplacer dans les plans $(\vec{u}_y, \vec{u}_z)$ (avec $\vec{u}_z$ vertical ascendant), comme présenté sur la figure 1. Chaque pendule de masse totale m est constitué d'une tige et d'une masse : on note J son moment d'inertie par rapport à Δ et son centre d'inertie est à la distance l du point d'accroche O. L'axe Δ est en réalité un fil de torsion qui lie les pendules entre eux par couple élastique : en prenant comme sens positif de rotation la direction $\vec{u}_x$, si un pendule fait avec son voisin un angle α (orienté du premier pendule vers le second), il subit le couple $\vec{\Gamma} = C\alpha\vec{u}_x$. On suppose que seuls les plus proches voisins sont en interaction avec le pendule n . En outre, chaque pendule est soumis à un couple de frottement fluide $\vec{f} = -f\dot{\theta}\vec{u}_x$.

On note $\theta_n(t)$ l'angle que fait le pendule n par rapport à sa position d'équilibre dans le champ de pesanteur uniforme.

1. Établir l'équation différentielle liant $\theta_{n-1}(t)$, $\theta_n(t)$ et $\theta_{n+1}(t)$.
2. On introduit, dans l'approximation des milieux continus, la fonction $\theta(x, t)$ telle que : $\theta_n(t) = \theta(x = n.a, t)$.

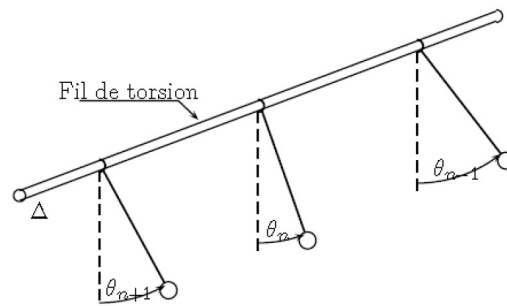


FIGURE 1 – Présentation d'une chaîne de pendules de torsion.

3. Linéariser l'équation précédente en précisant le domaine de validité de l'approximation.
4. Chercher les solutions en OPPM complexe de cette équation : on pose $\underline{\theta}(x, t) = \underline{\theta}_0 \exp \imath(kx - \omega t)$, où $\theta_0 = \theta_0 \exp \imath\varphi$. Comment s'écrit la relation de dispersion ? En déduire que k est un nombre complexe. En posant $k = k' + \imath k''$, comment s'écrivent les solutions en OPPM ? Que dire de ces ondes ?
5. On néglige les frottements. Ecrire la nouvelle relation de dispersion et déterminer k . En déduire la forme des solutions (on fera apparaître une pulsation ω_c et on distinguera plusieurs cas en fonction de la valeur de ω).

2) OPPH généralisées

a) Définition et relation de dispersion

On peut généraliser l'OPPH à des situations telles que celle rencontrée en exemple, c'est la manière la plus fructueuse de résoudre ce genre d'EDP

Définition :

On appelle **Onde Plane Progressive Harmonique Généralisée (OPPH*)** une onde de la forme $s(x, t) = \text{Re}(\underline{s}(x, t))$ avec

$$\underline{s}(x, t) = \underline{s}_0 e^{i(\underline{k}x - \omega t)}$$

où le vecteur d'onde $\underline{k}$ est complexe, d'où une généralisation de l'OPPH.

— A RETENIR —

Relation de dispersion : comme pour l'équation de D'Alembert, on peut injecter la solution en OPPH* dans l'EDP, et en déduire la **relation de dispersion**, c'est-à-dire le lien entre $\underline{k}$ et ω

b) Retour sur l'exemple

Nous avons trouvé dans l'exemple précédent que

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{mgl}{Ca^2} + i \frac{\omega f}{Ca^2}$$

qui correspond bien au cas décrit plus haut.

3) Contenu physique de la relation de dispersion

a) Écriture générique de la relation de dispersion

La relation de dispersion peut être résolue et mise sous la forme explicite faisant apparaître la partie réelle $k'(\omega)$ et imaginaire $k''(\omega)$

— ATTENTION!!! —

Pour dégager le contenu physique des OPPH*, il est nécessaire de revenir à l'amplitude réelle.

$$s(x, t) = s_0 e^{-k''(\omega)x} \cos(k'(\omega)x - \omega t + \varphi)$$

b) Phénomène lié à la partie réelle de $\underline{k}$

Le terme $\cos(k'(\omega)x - \omega t + \varphi)$ est identique à ce qu'on a rencontré lors de l'étude des OPPH dans les chapitres précédents. Il correspond à une onde plane progressive se propageant à la **vitesse de phase**

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)}$$

Définition :

La **vitesse de phase** correspond à la célérité d'une OPPH(*), et est définie par

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)}$$

où $k'(\omega)$ correspond à la partie réelle de la norme du vecteur d'onde.

— A RETENIR : MILIEU DISPERSIF —

Un milieu est dit **dispersif** si la vitesse de phase des ondes se propageant dans le milieu dépend de la pulsation ω de l'onde.

Le vide, caractérisé par $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$ est donc bien *non dispersif*.

c) Phénomène lié à la partie imaginaire de $\underline{k}$

Le terme $e^{-k''(\omega)x}$ qui apparaît en facteur de l'amplitude de l'onde s_0 décrit une modification de l'amplitude de l'onde lors de la propagation. Il peut y avoir amortissement ou amplification, selon le signe de $k''(\omega)$ et le sens de propagation. La situation la plus fréquente est celle de l'amortissement de l'onde : on dit alors que le milieu est **absorbant**. La distance caractéristique d'amortissement de l'onde dans le milieu est donnée par :

$$\delta = \frac{1}{|k''(\omega)|}$$

quantité qui dépend en général de la pulsation ω de l'onde.

A RETENIR : MILIEU ABSORBANT

Un milieu est dit **absorbant** si l'amplitude de l'onde décroît lors de la propagation. La distance caractéristique d'amortissement de l'onde est

$$\delta = \frac{1}{|k''(\omega)|}$$

d) Retour sur la chaîne d'oscillateurs couplés

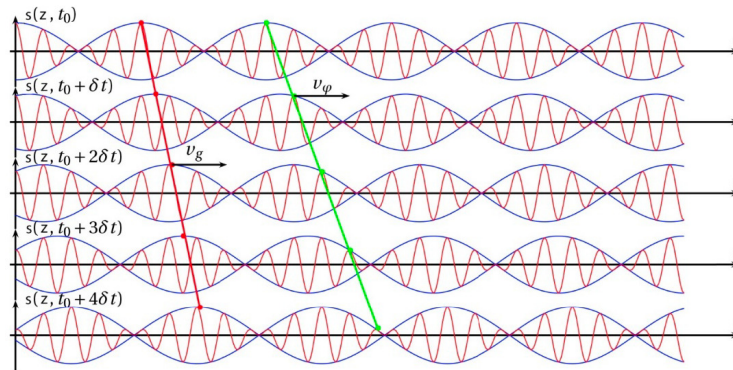
II - Paquets d'onde

Dans le cadre du programme, on se limitera dans cette partie au cas d'un milieu non absorbant et faiblement dispersif, c'est-à-dire $\underline{k} = k'(\omega) = k(\omega) \in \mathbb{R}$

1) Position du problème ; signal comportant 2 pulsations voisines

Une OPPH ne peut pas représenter à elle seule une onde réelle, comme nous l'avons déjà vu plusieurs fois. En revanche, c'est la première fois que nous laissons entendre que la relation de dispersion induit une différence dans la propagation de l'onde : milieu dispersif.

Une onde réelle est limitée spatialement et temporellement. On peut commencer à observer ce fait en sommant deux OPPH de pulsation voisine (avec python, par exemple)



Il apparaît ici 2 points importants :

- L'onde totale se propage à une vitesse différente de chaque OPPH : l'onde totale (réelle) se propage à la *vitesse de groupe* v_g (voir plus loin pour la définition).
- On commence à voir une sorte de localisation : certains points ne sont jamais "atteints" par l'onde à un instant donné.

2) Notion de paquet d'onde

Considérons maintenant une superposition de plusieurs OPPH*. Cette onde réelle est donc limitée spatialement et temporellement. L'extension spatiale est liée à l'extension temporelle par la relation de dispersion, il suffit donc que l'onde ait une extension temporelle donnée. D'après la théorie de la transformée de Fourier (non au programme...) l'extension temporelle Δt de l'onde est reliée à la largeur $\Delta\omega$ du spectre de l'onde réelle par la relation

$$\Delta t \Delta\omega \approx 2\pi$$

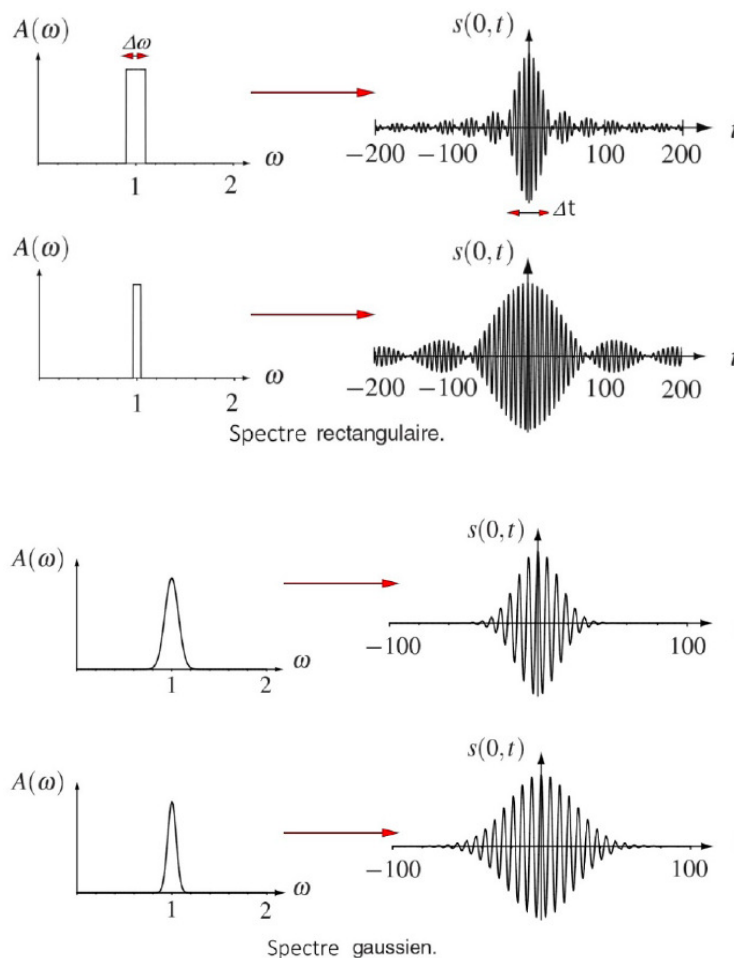
Définition :

Un **paquet d'ondes** est une somme d'OPPH* se propageant dans la même direction $\vec{u}$ de largeur spectrale $\Delta\omega$ et dont les pulsations sont centrées au voisinage d'une pulsation moyenne ω_0 telle que $\Delta\omega \ll \omega_0$

En choisissant $\vec{u} = \vec{u}_x$, un paquet d'ondes peut s'écrire, en notation réelle :

$$s(x, t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(kx - \omega t + \varphi(\omega)) d\omega$$

Suivant la forme de $A(\omega)$, le paquet d'ondes a une forme particulière. Dans le même ordre d'idée, plus le spectre du paquet d'ondes est piqué autour de ω_0 ($\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ sur les figures ci-dessous), plus le paquet d'ondes est étalé en temps.



$A(\omega)$ est la *transformée de Fourier* de $s(0, t)$.

En complexe, cela donne :

$$\underline{s}(x, t) = \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega$$

3) Propagation du paquet d'ondes ; vitesse de groupe

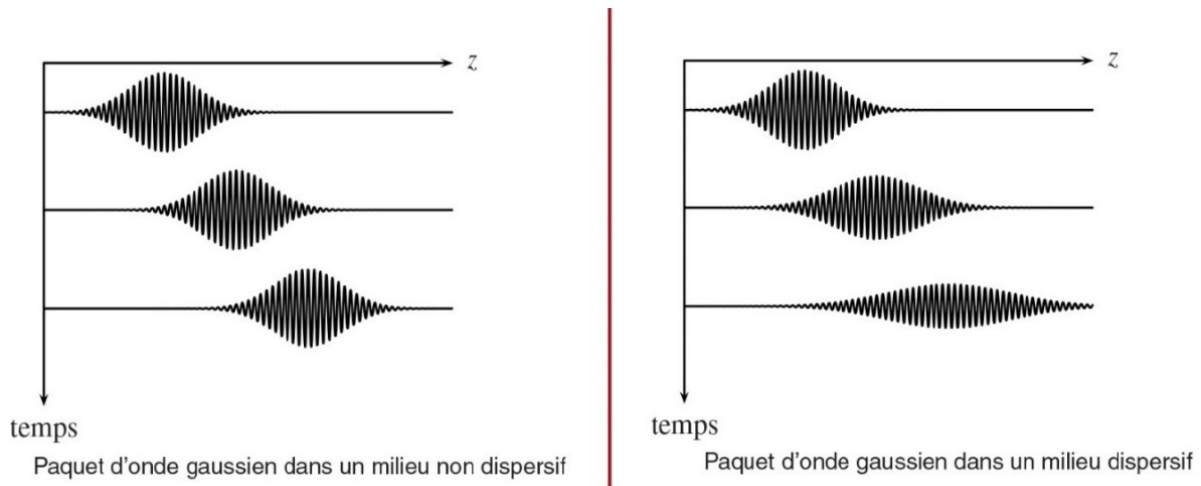
À partir du signal

$$\underline{s}(0, t) = \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

émis par une source en $x = 0$, le paquet d'ondes va se propager dans le temps et l'espace. Ce paquet d'ondes est la superposition de plusieurs OPPH*, chacune d'entre elles se propageant à la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{\omega}{k(\omega)}$. En superposant les OPPH* après propagation, on peut déduire que :

$$\underline{s}(x, t) = \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{(k(\omega)x - i\omega t)} d\omega$$

La vitesse de phase dépend *a priori* de la pulsation : le milieu est dispersif. Les différentes OPPH oscillent à des fréquences différentes : le paquet d'ondes va se déformer (voir ci-dessous, figures de droite)



Remarque : Si le milieu n'est pas dispersif, k est une constante, toutes les OPPH se propagent à la même vitesse, le paquet d'ondes ne se déforme pas.

Pour aller plus loin dans la description du phénomène, il est nécessaire d'écrire la relation de dispersion, dans le cas d'un milieu faiblement dispersif (cadre du programme)

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}$$

que l'on peut injecter dans l'expression du paquet d'ondes. Cela fera apparaître un terme qui dépend de ω_0 (et plus de ω donc on pourra le sortir de l'intégrale) et d'un terme

$$\int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{i\omega \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} x - i\omega t} = \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{i\omega \left(\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} x - t \right)}$$

Le paquet d'ondes à l'abscisse x s'écrit alors comme le produit de deux ondes planes progressives :

- Une onde moyenne qui est une OPPH de pulsation ω_0 se propageant à la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)}$$

- Une onde enveloppe qui est une OPPH se propageant à la vitesse

$$\frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}$$

que l'on nomme **vitesse de groupe**. L'onde enveloppe présente des variations temporelles lentes car la pulsation caractéristique des OPPH la composant est $\omega - \omega_0 \ll \omega_0$

A RETENIR

Dans un milieu peu dispersif, l'enveloppe du paquet d'ondes se propage sans déformation à la **vitesse de groupe** :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k(\omega_0)}$$

III - Ondes EM dans un conducteur

1) Equation de propagation

Nous allons donc étudier la propagation d'une onde EM dans un milieu ohmique de conductivité électrique γ ; le lien entre le vecteur densité de courant noté $\vec{j}$ et le champ électrique est donné par la **loi d'Ohm locale**

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Les équations de Maxwell sont similaires à celles dans le vide sauf l'équation de Maxwell-Ampère qui devient

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On suppose le milieu globalement neutre électriquement, soit $\rho = 0$. De plus, on se place dans le cadre de l'ARQS, c'est-à-dire que l'on néglige le courant de déplacement devant le courant électrique créé dans le conducteur à cause de la loi d'Ohm :

$$\frac{\|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\gamma \vec{E}\|} \simeq \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma} \ll 1$$

qui est donc valable tant que la pulsation des ondes électromagnétiques vérifie $\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0}$. On obtient donc les quatre équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= 0 \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} &= -\mu_0 \gamma \vec{E} \end{aligned}$$

On essaie de trouver la nouvelle équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$ (ou $\vec{B}$).

On utilise toujours la même technique : on calcule "rot de rot"

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B})$$

en utilisant M-F puis le théorème de Schwarz. On utilise alors l'équation de M-A, pour remplacer le rotationnel à droite. On obtient alors l'équation

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

qui est également l'équation aux dérivées partielles pour le champ magnétique.

Ce n'est pas une équation de propagation, la dérivée spatiale d'ordre 2, associée à une dérivée temporelle d'ordre 1 est caractéristique des phénomènes de **diffusion**, comme la diffusion de particules ou la diffusion thermique. Il n'y a plus d'invariance par renversement du temps pour l'évolution du champ électrique (ou magnétique) dans un conducteur. En effet, la loi d'Ohm sous-entend des phénomènes de dissipation d'énergie (sous forme d'effet Joule), ce qui introduit une irréversibilité du phénomène propagatif.

2) Effet de peau

On suppose que le conducteur de conductivité γ et de perméabilité μ_0 remplit le demi-espace $x > 0$. On va considérer que la propagation d'une onde se produit selon cette direction Ox , et que le champ électrique est dirigé selon l'axe Oy . On recherche les solutions de cette équation sous forme d'OPPH* :

$$\vec{E}(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{u}_y$$

On peut alors obtenir la relation de dispersion :

$$k^2 = i\omega\mu_0\gamma$$

Si on prend la racine carrée (ATTENTION au complexe...) alors on trouve :

$$k = (1 + i) \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$$

La racine carrée a la dimension de l'inverse d'une distance, caractéristique du milieu et de la pulsation de l'onde. Cette longueur est appelée **épaisseur de peau**, ou parfois *longueur de pénétration* :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

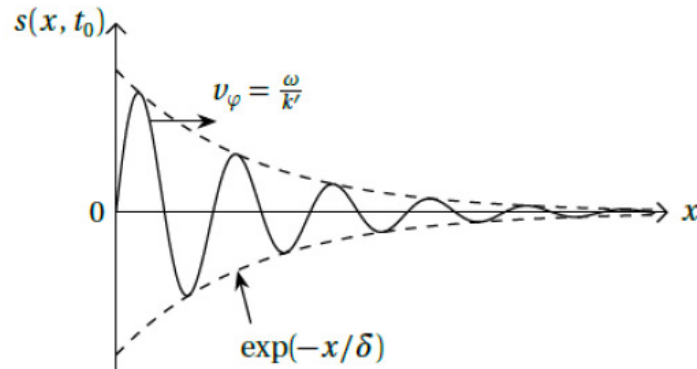
et elle représente la profondeur à laquelle un champ électromagnétique peut se propager dans un conducteur. En effet, si on injecte la relation de dispersion dans l'expression de $\vec{E}$, on obtient

$$\vec{E}(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{u}_y = \underline{E}_0 e^{i((1+i)\frac{x}{\delta} - \omega t)} \vec{u}_y = \underline{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\frac{x}{\delta} - \omega t)} \vec{u}_y$$

soit, en revenant au champ réel :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\frac{x}{\delta} - \omega t + \phi\right) \vec{u}_y = s(x, t) \vec{u}_y$$

que l'on peut tracer à un instant t_0



Remarque :

- Il est à noter ici que le champ se propage dans le conducteur mais que son amplitude décroît exponentiellement sur une longueur caractéristique δ ; cette épaisseur de peau représente donc bien la profondeur sur laquelle un champ électromagnétique pénètre dans un conducteur.
- Plus le conducteur se rapproche d'un conducteur parfait ($\gamma \rightarrow \infty$), plus l'épaisseur de peau est faible : le champ EM ne pénètre quasiment pas à l'intérieur d'un très bon conducteur.
- ODG : pour le cuivre pour une longueur d'onde $\lambda = 500$ nm (visible), on trouve $\delta = 0,26$ nm. Pour un courant électrique de fréquence 50 Hz, on trouve $\delta = 9,4$ mm ; en conséquence, il ne sert à rien de transmettre le courant électrique dans des gros câbles, car l'onde électromagnétique qui se propage va se concentrer sur la périphérie du câble. Dans le cas des ondes lumineuses, le cuivre est dit " opaque " : la longueur de pénétration est très faible (quasi nulle).

3) Aspects énergétiques

Le champ magnétique peut se déduire du champ électrique par l'équation de Maxwell-Faraday, et on trouve

$$\underline{B}_z(x, t) = \frac{k}{\omega} \underline{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

Et on peut alors calculer le vecteur de Poynting moyen

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(\vec{E} \wedge \vec{B}^* \right) = \frac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0} e^{-\frac{2x}{\delta}} \frac{1}{\delta\omega} \vec{u}_x$$

Comme attendu, l'énergie se propage dans le sens de $\vec{u}_x$; en revanche, il y a bien atténuation de l'onde, liée à un phénomène de dissipation (effet Joule essentiellement).

Remarque :

$$\frac{E_y}{\mu_0 c B_z} \simeq \frac{\omega \delta}{c} \ll 1$$

à l'aide de la condition de régime lentement variable (ARQS). La contribution magnétique est prédominante.

IV - Onde dans un plasma dilué

1) Interaction entre une OPPH et un plasma

a) Modèle du plasma

Un plasma est un gaz homogène d'atomes qui sont tous ionisés. Un plasma est globalement neutre, mais à l'échelle locale, le mouvement des électrons est indépendant de celui des noyaux. On va supposer également que ce plasma est très peu dense, ce qui va nous permettre de confondre en chaque point de l'espace, le champ électrique total avec le champ électrique de l'onde électromagnétique (Si le plasma est trop dense, le champ électrique total en chaque point de l'espace est la superposition du champ électrique extérieur appliqué (celui de l'onde électromagnétique) et du champ électrique créé par la distribution de charges autour de ce point, ce qui complique grandement l'étude). La densité de charges totale sera prise égale à zéro : $\rho_{tot} = 0$. On va de plus négliger l'influence du poids sur les électrons et les ions, et on va supposer que les particules *ne sont pas relativistes*, c'est-à-dire que leur vitesse est toujours très faible devant la célérité de la lumière.

b) Aspects microscopiques

Nous allons ici étudier en détail le mouvement des particules chargées. On considère dans la suite des atomes de numéro atomique Z , qui possèdent donc Z électrons. Chaque noyau a une masse M et une charge $+Ze$, alors que chaque électron possède une masse m et une charge $-e$. Chacune de ces particules est soumise à la force de Lorentz, lorsqu'une onde électromagnétique parcourt le plasma dilué. Cette force a pour expression

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

où q est la charge de la particule et $\vec{v}$ sa vitesse. En ordre de grandeur

$$\frac{\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \approx \frac{vB}{E} \approx \frac{v}{c} \ll 1 \quad \text{mouvement non relativiste}$$

car le lien entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pour une OPPH(*) est

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}$$

où $\vec{u}_x$ est à nouveau le vecteur unitaire de la direction de propagation.

En conclusion, on peut donc négliger la composante magnétique de la force de Lorentz dans ce problème. Les électrons et les ions ne sont soumis qu'à la force électrique $\vec{F}_{elec} = q\vec{E}$.

On peut alors écrire le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à un ion puis à un électron du système. On obtient :

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} \quad \text{pour un électron} \quad (1)$$

$$M \frac{d\vec{v}_i}{dt} = +Ze\vec{E} \quad \text{pour un ion.} \quad (2)$$

La dépendance temporelle de $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_i$ est de type $\exp(-i\omega t)$, car le champ électrique extérieur est celui d'une OPPH à la pulsation ω dans le plasma. On en déduit l'ordre de grandeur sur les vitesses : (on remplace les dérivées temporelles par la multiplication par $-i\omega$)

$$\frac{\|\vec{v}_i\|}{\|\vec{v}_e\|} \approx \frac{|Ze/(M\omega)|}{|-e/(m\omega)|} \approx \frac{Zm}{M} \ll 1$$

car un ion est constitué de Z protons et de neutrons, qui sont chacun environ 1000 fois plus lourd qu'un électron ; le rapport Zm/M est, au maximum, d'ordre 10^{-3} (ion constitué uniquement de Z protons). En conséquence, **seuls les électrons ont un mouvement significatif dans le plasma, les ions positifs restent globalement fixes.**

2) Conductivité complexe du plasma

Les électrons vont donc être mis en mouvement par l'onde électromagnétique, créant ainsi un vecteur densité de courant $\vec{j}_e$, et vont donc influencer sur les équations de Maxwell (notamment sur l'équation de Maxwell-Ampère). Ce vecteur densité de courant a pour expression : $\vec{j}_e = -ne\vec{v}_e$, où n est la densité volumique en électrons. On obtient donc la relation :

$$\frac{d\vec{j}_e}{dt} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

En RSE, le champ électrique imposant la dépendance temporelle

$$\vec{E}(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{u}_y$$

On obtient :

$$\vec{j}_e = i \frac{ne^2}{\omega m} \vec{E}$$

A RETENIR

L'interaction entre un plasma dilué et une onde électromagnétique peut se faire en introduisant une **conductivité complexe** telle que

$$\vec{j}_e = \gamma \vec{E}$$

avec $\gamma = i \frac{ne^2}{m\omega}$.

La description du plasma correspond à : densité volumique de charges nulle (plasma neutre), mais avec le vecteur densité de courant $\vec{j}_e$.

Interprétation énergétique :

La conductivité complexe est donc imaginaire pure. On va estimer la puissance volumique moyenne transférée par le plasma à l'onde électromagnétique (loi de Joule)

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = 0$$

Il n'y a pas de transfert de puissance entre le milieu et l'onde électromagnétique en moyenne.

3) Équation de propagation dans le plasma

Nous allons dériver l'équation de propagation du champ électrique, en utilisant les 4 équations de Maxwell originelles, sans densité volumique de charges, mais avec un courant d'électrons tel que :

$$\frac{d\vec{j}_e}{dt} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

Et on utilise la méthode classique de "rot de rot" pour l'obtenir.

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) &= \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}, \\ \Rightarrow -\Delta \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

en utilisant les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère (Les dérivées temporelles et spatiales peuvent être interverties, car les variables d'espace et de temps sont indépendantes). On remplace maintenant la dérivée temporelle du vecteur densité de courant par son expression en fonction du champ $\vec{E}$ et on obtient :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Il est rappelé ici que $c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$.

4) Relation de dispersion et forme des solutions

A nouveau on propose les solutions sous la forme :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{u}_y$$

que l'on injecte dans l'équation de propagation ci-dessus et on obtient :

$$-k^2 = \frac{\mu_0 ne^2}{m} - \frac{\omega^2}{c^2}$$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

où $\omega_p = \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 n e^2}{m}} = \sqrt{\frac{n e^2}{m \epsilon_0}}$ est appelée **pulsation plasma** (une rapide analyse dimensionnelle justifiera l'appellation de "pulsation").

a) Domaine de transparence $\omega > \omega_p$

Si $\omega > \omega_p$, alors $\underline{k}^2 > 0$ et $\underline{k} = k \in \mathbb{R}$ et on trouve :

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

Les valeurs $\pm$ correspondent à une propagation selon $\pm \vec{u}_x$. On choisira la solution $+$ dans la suite.

On peut alors exprimer la *vitesse de phase* et la *vitesse de groupe* de l'onde :

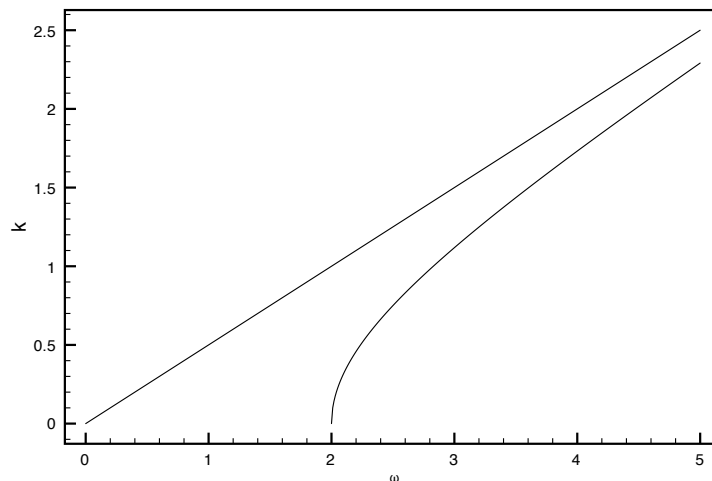
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\frac{k}{\omega}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} > c$$

Le milieu est dispersif, car la vitesse de phase dépend de la pulsation. De plus, cette vitesse, supérieure à c (???) ne transporte pas d'information, elle n'a pas de réalité physique dans le cas du plasma, où la propagation d'un paquet d'onde est à prendre en compte (car le milieu est dispersif). On peut donc calculer la vitesse de son enveloppe (vitesse de groupe). On trouve

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < c$$

Quelle est la signification physique de ces deux vitesses ?

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la relation de dispersion dans le cas du plasma. La droite asymptote (pour $\omega \rightarrow \infty$) à cette courbe représente le cas non dispersif pour lequel $\omega = ck$. La *vitesse de groupe* représente la tangente en chaque point de cette courbe, alors que la *vitesse de phase* représente l'arc entre l'origine et le point de la relation de dispersion considéré. L'information sur cette courbe se trouve plutôt dans ses tangentes que dans ces arcs.



b) Domaine réactif $\omega < \omega_p$

Dans cette situation, $\underline{k}^2 < 0$ et donc $\underline{k}$ est imaginaire pur :

$$\underline{k} = i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = i k_0$$

et le champ électrique s'exprime sous la forme :

$$\vec{E}(x, t) = \underline{E}_0 e^{-k_0 x} e^{-i\omega t} \vec{u}_y$$

soit

$$\vec{E}(x, t) = E_0 e^{-k_0 x} \cos(-\omega t + \phi) \vec{u}_y$$

La propagation disparaît, on trouve un champ oscillant temporellement, mais **sans propagation**.

A RETENIR

Dans le domaine réactif du plasma ($\omega < \omega_p$), il ne peut y avoir d'onde qui se propage ; à la place, on obtient un champ oscillant temporellement ; on ne peut plus définir de célérité. On parlera d'**onde évanescence**.

c) Bilan

La grandeur $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ est appelée **pulsation plasma**. C'est elle qui sépare deux régimes :

- Lorsque $\omega < \omega_p$, le vecteur d'onde est imaginaire pur, et l'onde ne se propage pas ; on obtient une onde évanescence dans le plasma. C'est le *domaine réactif* du plasma.
- Lorsque $\omega > \omega_p$, le vecteur d'onde est réel et l'onde se propage dans le plasma. On peut alors déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe du paquet d'onde. C'est le *domaine de transparence* du plasma.

Le plasma se comporte donc comme un **filtre passe-haut** : seules les ondes dont la pulsation est suffisamment élevée peuvent se propager dans un plasma. ω_p correspond à la pulsation de coupure du filtre.

5) Aspects énergétiques

a) Domaine de transparence

On a ici un milieu dispersif avec une onde qui se propage. On peut calculer le vecteur de Poynting, de manière similaire au cas du conducteur, mais il n'y a pas d'absorption. Voir TD

b) Domaine réactif

On va calculer le vecteur de Poynting moyen. Pour ce faire, on reprend le champ électrique complexe, et on calcule le champ magnétique :

$$\vec{B}(x, t) = -\frac{k}{\omega} E_0 e^{-k_0 x} e^{-i\omega t} \vec{u}_z$$

et

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$

car k est imaginaire pur. *Dans le domaine réactif, une onde électromagnétique harmonique ne transporte aucune puissance en moyenne.*

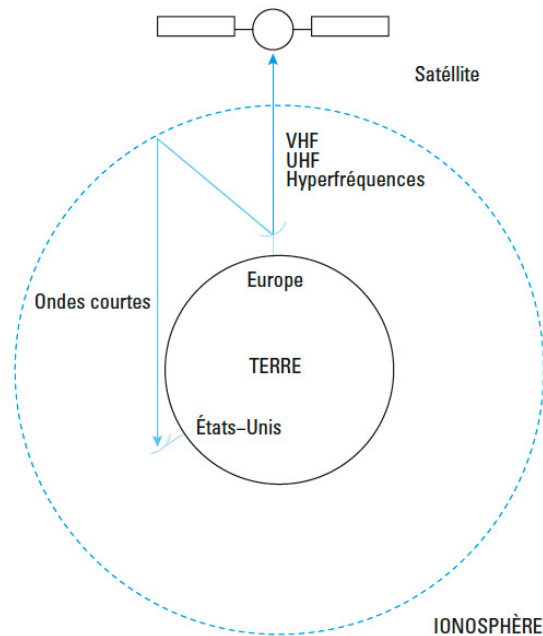
6) L'ionosphère, un exemple de plasma dilué.

dans la haute atmosphère terrestre (entre 60 et 800 km d'altitude), il existe une couche appelée l'ionosphère. Du fait des rayonnements ionisants permanents venant de l'espace, les atomes présents dans cette couche sont toujours ionisés ; de plus la densité de particules n'est pas très grande, car il n'y a presque plus d'air à cette altitude.

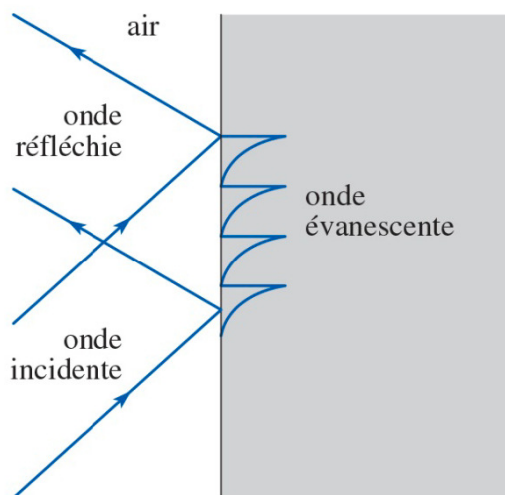
Pour l'ionosphère, une densité typique d'électrons libres est $10^{10} - 10^{12} \text{ m}^{-3}$, ce qui donne une pulsation plasma de l'ordre de $6.10^6 - 6.10^7 \text{ rad.s}^{-1}$, soit une fréquence de coupure de $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 10^6 - 10^7 \text{ Hz}$. Cette fréquence se situe, d'après le spectre des ondes électromagnétiques dans les ondes radio. En 1901, les premiers essais de communication transatlantique ont, sans que les scientifiques s'en doutent, utilisé le phénomène décrit plus haut : en utilisant des ondes radio de fréquences de l'ordre de 100 kHz, les émetteurs pointés vers le ciel envoyaient des ondes en direction de l'ionosphère ; l'onde incidente ne peut se propager dans celle-ci (car $100 \text{ kHz} < 1 \text{ MHz} = f_p$), elle est donc *réfléchi* vers le bas, et une détection aux États-Unis est possible. De nos jours, les communications transatlantiques ne sont plus effectuées de cette façon, mais plutôt par fibre optique immergée dans l'océan, ou par satellite.

Au contraire, depuis les années 1960, et l'envoi d'astronautes dans l'espace, il devient nécessaire de franchir cette barrière pour communiquer avec les hommes et le matériel. Le domaine des ondes radio utilisé alors sont les ondes VHF, UHF et hyperfréquences, dont les fréquences sont toutes supérieures à 30 MHz, ce qui est supérieur à la fréquence plasma f_p .

Cette discussion est résumée par le dessin de la figure ci-dessous.



Plus précisément, au niveau de l'entrée de l'ionosphère, on peut représenter



La partie suivante analyse en détail la réflexion et la transmission d'une onde à l'interface de deux milieux (par exemple entre l'air et le plasma).

V - Réflexion et transmission d'une onde EM entre deux milieux

1) Position du problème

On va étudier ici la réflexion et transmission d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique polarisée rectilignement transverse à l'interface entre deux milieux caractérisés par leur indice complexe (voir définition ci-dessous) $\underline{n}_1$ et $\underline{n}_2$ dans le cas d'une incidence normale : coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique.

Définition : Indice complexe. On définit l'indice (optique) complexe d'un milieu matériel par la relation

$$\underline{k} = \underline{n} \cdot \frac{\omega}{c}$$

On a bien $\underline{n} = 1$ pour le vide. Pour les autres milieux, l'indice complexe dépend de la pulsation (voir loi de Cauchy en optique géométrique, par exemple).

On se place donc dans le cas d'une onde transverse, le champ électrique étant de direction constante (selon $\vec{u}_y$, par exemple, si on considère la propagation selon l'axe Ox). L'interface entre les deux milieux d'indice $\underline{n}_1$ ($x < 0$) et $\underline{n}_2$ ($x > 0$) est en $x = 0$.

Condition de continuité des champs à l'interface entre deux milieux :

lorsque l'on considère une onde transverse, le champ électrique est *continu* en $x = 0$. $\vec{E}_1(x = 0, t) = \vec{E}_2(x = 0, t)$.
Plus généralement, les champs de part et d'autre d'une interface vérifient :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

où $\vec{n}_{12}$ est le vecteur unitaire normal à l'interface, σ la densité surfacique de charge de l'interface.

De la même manière, en l'absence de courant au niveau de l'interface seule, le champ magnétique est *continu* en $x = 0$.

2) Coefficients de réflexion et transmission en amplitude**a) Expression des coefficients**

Dans le milieu 1, on note le champ électrique incident sous forme d'une OPPH*

$$\vec{E}_i(x, t) = \vec{E}_{0,i} e^{i\omega\left(\frac{n_1}{c}x - t\right)}$$

et le champ réfléchi :

$$\vec{E}_r(x, t) = \vec{E}_{0,r} e^{i\omega\left(\frac{n_1}{c}x + t\right)}$$

Dans le milieu 2, on note le champ électrique transmis (qui se propage dans le même sens que l'onde incidente) :

$$\vec{E}_t(x, t) = \vec{E}_{0,t} e^{i\omega\left(\frac{n_2}{c}x - t\right)}$$

Comme la polarisation est rectiligne, on va également supposer que ces trois champs sont dirigés dans la direction Oy .
On définit enfin les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ complexes du champ par les relations :

$$\underline{r} = \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{E_{0,t}}{E_{0,i}}$$

Le calcul se passe en 3 étapes essentielles (voir ondes sonores) :

- **Etape 1** : on impose la continuité du champ électrique en $x = 0$ et écrire :

$$E_{0,i} + E_{0,r} = E_{0,t}$$

soit

$$1 + \underline{r} = \underline{t} \quad (3)$$

- **Etape 2** : on calcule les champ magnétique associé à chaque champ électrique (Maxwell-Faraday)

$$\vec{B}_i(x, t) = -\frac{n_1}{c} E_{0,i} e^{i\omega\left(\frac{n_1}{c}x - t\right)} \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_r(x, t) = \frac{n_1}{c} E_{0,r} e^{i\omega\left(\frac{n_1}{c}x + t\right)} \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_t(x, t) = -\frac{n_2}{c} E_{0,t} e^{i\omega\left(\frac{n_2}{c}x - t\right)} \vec{u}_z$$

- **Etape 3** : on va maintenant imposer la continuité du champ magnétique :

$$\frac{n_1}{c} E_{0,i} - \frac{n_1}{c} E_{0,r} = \frac{n_2}{c} E_{0,t}$$

soit

$$n_1 \cdot (1 - \underline{r}) = n_2 \cdot \underline{t} \quad (4)$$

On combine les équations (3) et (4) : on injecte l'équation (3) dans (4) pour obtenir :

$$n_2 \cdot (1 + \underline{r}) = n_1 \cdot (1 - \underline{r})$$

soit

$$\underline{r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

et ensuite

$$\underline{t} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

b) Cas de l'interface vide/plasma

Considérons une onde qui vient du vide (milieu 1) et qui essaye de se propager dans un plasma (milieu 2). L'indice complexe du vide est $\underline{n}_1 = 1$ et celui du plasma est

$$\underline{n}_2 = \underline{n} = -i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$$

valable dans les deux régimes. Il est alors possible d'exprimer les coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique

$$\underline{r} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2}{1 + \underline{n}}$$

3) Coefficients de réflexion et transmission en puissance entre deux DLHI

Le cadre du programme se restreint volontairement au cas de l'interface entre deux matériaux diélectriques linéaires, homogènes, isotropes et transparents.

a) Qu'est ce qu'un DLHI ?

Définition :

Un **milieu diélectrique linéaire homogène isotrope** (DLHI) est un matériau isolant, sans charge ni courant, dont la permittivité est $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ où ε_r est appelée *permittivité diélectrique relative* du matériau.

Tout se passe alors comme dans le vide pour le champ EM à condition **de remplacer ε_0 par ε** . La vitesse de phase dans un tel matériau sera alors (voir cas du vide)

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

On peut donc affirmer que l'indice de réfraction d'un DLHI est tel que $k = n \frac{\omega}{c} = \sqrt{\varepsilon_r}$.

b) Coefficients de réflexion et de transmission entre deux DLHI

Une onde EM incidente dans un DLHI 1 (caractérisé par $\varepsilon_{r,1}$ donc par n_1) rencontre un milieu DLHI 2 (caractérisé par $\varepsilon_{r,2}$ donc par n_2). Les coefficients de réflexion et transmission pour le champ électrique s'expriment :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Pour pouvoir calculer les coefficients de réflexion et de transmission en puissance, il va être nécessaire de les définir. La définition est très analogue au cas des ondes sonores.

Définition :

Les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance sont définis par :

$$R = \frac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot (-\vec{u}_x)}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot (\vec{u}_x)}$$

et

$$T = \frac{\langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot (\vec{u}_x)}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot (\vec{u}_x)}$$

On reprend les expressions du champ EM précédent, avec les indices réels. On trouve alors (à faire ! ça vous permettra de calculer des vecteurs de Poynting...) :

$$R = r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

et

$$T = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Remarque :

La relation $T + R = 1$ découle de la conservation de la puissance des ondes EM à l'interface.