

Introduction

L'étude des propriétés des corps noirs a permis de montrer que les échanges d'énergie entre matière et rayonnement se font de manière quantifiée. Cette idée s'est progressivement imposée, après les travaux de M. Planck repris par A. Einstein et son hypothèse de l'existence des photons. Cette théorie a reçu une pleine confirmation dans l'étude des spectres atomiques comme ceux que l'on peut utiliser classiquement dans les expériences d'optique avec des lampes à vapeur de sodium ou de mercure.

Les processus d'interaction matière-rayonnement sont au nombre de trois : l'absorption, l'émission spontanée et l'émission stimulée. Cette dernière a pour particularité de produire un second photon partenaire d'un photon incident, accordé sur la transition. Ce mécanisme est essentiel car il permet d'augmenter un signal incident de manière cohérente. C'est ce mécanisme qui est à l'œuvre dans les LASER.

Le calcul des probabilités de transition d'un niveau à l'autre permet de définir les conditions d'obtention de cette augmentation de signal. On met en évidence que l'on doit inverser les populations des niveaux fondamental et excité par des mécanismes auxiliaires dits de pompage.

Table des matières

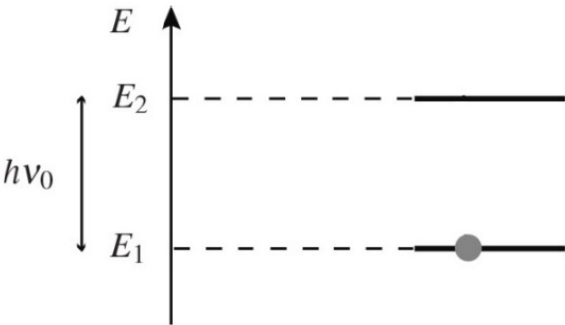
I - Interactions matière-rayonnement	1
1) Système à deux niveaux d'énergie	1
2) Absorption	1
3) Émission spontanée	2
4) Émission stimulée (ou induite)	2
5) Les coefficients d'Einstein	2
6) Condition d'amplification	4
II - Propriétés optiques d'un faisceau limité spatialement	5
1) Profil de faisceau gaussien	5
2) Focalisation et diffraction	6

I - Interactions matière-rayonnement

L'approche proposée ici est dite "semi-classique", car la matière est considérée comme composée d'atomes présentant des niveaux d'énergie quantifiés (voir cours de mécanique quantique Sup et Spé), alors que le champ EM est traité classiquement comme une onde (Si l'on voulait une théorie quantique de cette interaction matière-rayonnement, il faudrait étudier l'interaction quantique entre l'atome quantifié et le photon : *électrodynamique quantique*).

1) Système à deux niveaux d'énergie

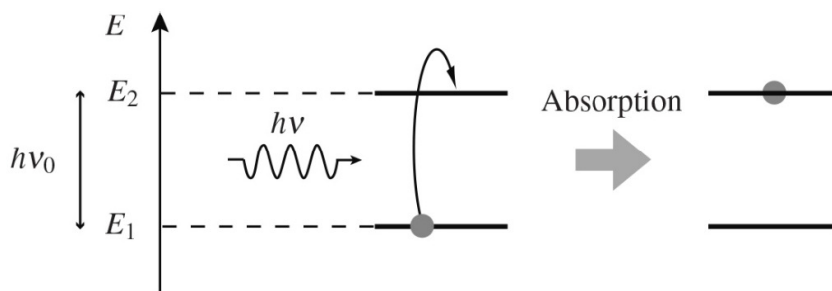
Les processus d'interaction matière-rayonnement ont été introduits par Einstein en 1916 pour donner une explication physique au spectre du corps noir. Considérons un atome à deux niveaux d'énergie avec un état fondamental 1 d'énergie E_1 et un état excité 2 d'énergie E_2 , de telle sorte que $E_2 - E_1 = h\nu_0 = \hbar\omega_0$, où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite.



L'atome est supposé initialement à l'équilibre thermique à une température T telle que $k_B.T \ll h\nu_0$, ainsi seul l'état 1 est peuplé (voir figure). Pour pouvoir peupler l'état 2, il faut apporter exactement l'énergie $h\nu_0$.

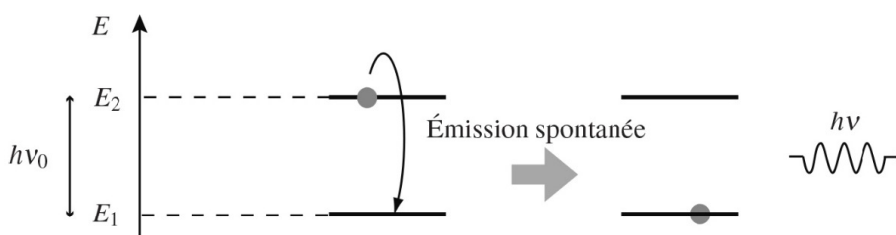
On distingue alors trois processus d'interaction matière-rayonnement

2) Absorption



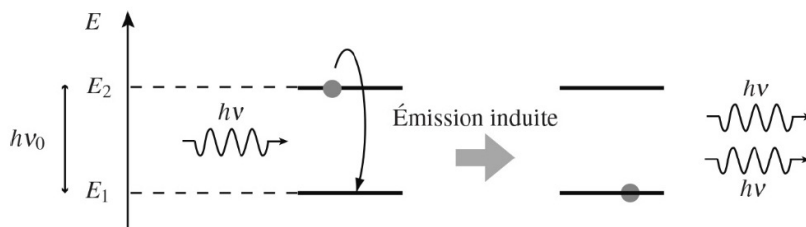
Un atome dans l'état fondamental 1 est donc susceptible d'**absorber** de l'énergie d'une onde EM incidente, et ainsi de passer vers l'état excité 2. Pour ce faire, l'onde EM de fréquence ν doit apporter l'énergie $E_2 - E_1 = h\nu_0$, il faut donc que $\nu = \nu_0$. On dira que l'atome va absorber un photon de fréquence ν_0 .

3) Émission spontanée



Un atome initialement dans un état excité 2 peut retourner dans son état fondamental 1 en émettant un photon spontanément, et en l'absence de *toute onde EM incidente*. Ce mécanisme d'émission correspond à une **émission spontanée**. Dans l'échantillon d'atomes, ces transitions se produisent aléatoirement dans le temps. Symboliquement nous représentons ce mécanisme d'interaction en indiquant la présence d'un photon par une flèche arrondie, et par une flèche droite indiquant le sens de la transition dans les niveaux d'énergie (voir ci-dessus).

4) Émission stimulée (ou induite)



Pour retrouver les propriétés du corps noir, Einstein a introduit un troisième mécanisme d'interaction rayonnement-matière pour équilibrer le bilan "absorption/émission" en accord avec les observations expérimentales. Le mécanisme introduit est l'émission stimulée ou émission induite. L'atome est initialement dans l'état 2. L'interaction avec un photon de fréquence ν_0 va le faire "tomber" sur le niveau 1 en émettant un nouveau photon de même fréquence. La figure ci-dessous schématise ce mécanisme, qui diffère notablement du mécanisme d'émission spontanée puisque le photon émis est un "clone" du photon incident : même direction, même phase, même quantité de mouvement.

5) Les coefficients d'Einstein

a) Densité spectrale d'énergie et équilibre thermodynamique

Un faisceau lumineux correspond à la propagation d'un champ électromagnétique. La densité volumique d'énergie électrique dans un tel faisceau est définie par : $u_{elec} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ où E est l'amplitude du champ électrique. On définit également la densité spectrale d'énergie u_ν par la relation :

$$u_{elec} = \int_0^\infty u_\nu d\nu$$

Elle s'exprime en $\text{J.m}^{-3}.\text{Hz}^{-1}$.

Équilibre thermodynamique :

Soient N_1 et N_2 les populations respectives d'atomes dont l'énergie est E_1 et E_2 respectivement. À l'équilibre thermodynamique on admet que la population des niveaux suit la loi de Boltzmann. Les populations des 2 niveaux sont alors reliées par :

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}$$

où $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann. Nous supposons que les populations des niveaux d'énergie ont atteint un **régime stationnaire**.

b) Probabilités de transition

Nous adoptons pour la suite du calcul les notations d'Einstein. La probabilité ou **taux d'émission spontanée par atome et par unité de temps**, notée A_{21} , est le *premier coefficient d'Einstein*. Il s'exprime en s^{-1} . Les populations des niveaux 1 et 2 varient pendant l'intervalle de temps dt , sous l'effet de l'émission spontanée, des quantités

$$\begin{aligned} dN_{1sp} &= +A_{21}N_2 dt \\ dN_{2sp} &= -A_{21}N_2 dt = -dN_{1sp} \end{aligned}$$

Remarque :

la quantité $\tau = \frac{1}{A_{21}}$ est un temps caractéristique de décroissance correspondant à la **durée de vie** du niveau excité.

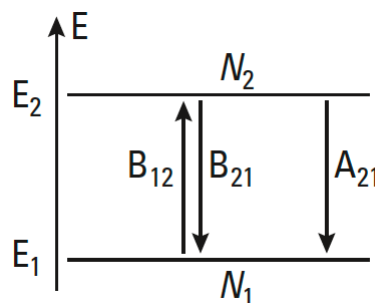
Pour le mécanisme d'**absorption**, Einstein émet l'hypothèse que le nombre d'atomes passant dans l'état d'énergie la plus élevée est proportionnel au temps d'interaction dt comme pour l'émission spontanée, au nombre d'atomes présents dans l'état fondamental ainsi qu'à la densité spectrale volumique d'énergie u_ν . La constante de proportionnalité, notée B_{12} , est une caractéristique du milieu atomique, c'est aussi le coefficient d'Einstein pour l'absorption. L'évolution élémentaire des populations pendant l'intervalle de temps dt se traduit par les équations :

$$\begin{aligned} dN_{1abs} &= -B_{12}u_\nu N_1 dt \\ dN_{2abs} &= +B_{12}u_\nu N_1 dt \end{aligned}$$

Enfin Einstein suppose que l'**émission stimulée (ou induite)** se décrit par un processus similaire à l'émission spontanée mais dépendant de la densité spectrale d'énergie. Ceci se traduit par les équations d'évolution suivantes :

$$\begin{aligned} dN_{1ind} &= +B_{21}u_\nu N_2 dt \\ dN_{2ind} &= -B_{21}u_\nu N_2 dt \end{aligned}$$

B_{21} est le coefficient d'Einstein pour l'émission stimulée. Le diagramme suivant résume ces trois processus d'interaction :

**c) Populations à l'équilibre**

À l'équilibre le nombre de transitions du niveau fondamental au niveau excité compense celui des transitions du niveau excité au fondamental. On a donc :

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt}$$

On désigne par $N = N_1 + N_2$ le nombre total d'atomes dans le système et on considère que le régime stationnaire est établi. L'évolution de la population d'atomes sur un niveau excité suit donc la loi :

$$\frac{dN_2}{dt} = [-A_{21}N_2 - B_{21}u_\nu N_2 + B_{12}u_\nu(N - N_2)] = 0$$

On en déduit la loi d'évolution de N_2 :

$$N_2 = \frac{B_{12}u_\nu}{A_{21} + u_\nu(B_{12} + B_{21})}N$$

On procède de même pour N_1 et on obtient

$$N_1 = \frac{A_{21} + B_{21}u_\nu}{A_{21} + u_\nu(B_{12} + B_{21})}N$$

On en déduit le rapport de populations $\frac{N_1}{N_2}$ dont on a déjà obtenu une expression avec la loi de Boltzmann :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{A_{21} + B_{21}u_\nu}{B_{12}u_\nu} = e^{\frac{h\nu_0}{k_B T}}$$

On peut obtenir plus de précision sur ces coefficients d'Einstein en étudiant quelques comportements limite. Si l'on fait tendre la température vers l'infini ($k_B T \ll h\nu_0$), le terme exponentiel tend vers 1 et la densité spectrale tend vers l'infini. Ceci conduit à la relation suivante :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{B_{21}}{B_{12}} = 1$$

soit $B_{12} = B_{21} = B$. On peut donc extraire l'expression de la densité spectrale d'énergie (loi de Planck pour le rayonnement du corps noir) :

$$u_\nu = \frac{A_{21}}{B} \times \frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{k_B T}} - 1}$$

Par identification, on trouve :

$$\frac{A_{21}}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

On remarque que la présence du mécanisme d'émission stimulée est indispensable pour obtenir l'expression correcte de la loi de Planck.

6) Condition d'amplification

a) Position du problème

Le paragraphe précédent a permis de calculer les probabilités de transitions pour les 3 mécanismes d'absorption, d'émission spontanée et enfin d'émission stimulée. Cette dernière présente l'intérêt de pouvoir amplifier le signal incident puisque le photon qui stimule la transition se retrouve "cloné". Si les deux photons se propagent à nouveau dans le système d'atomes, ils peuvent induire à leur tour un doublement du signal chacun etc. On a donc un signal dont l'intensité double à chaque transition induite. Comme les photons gardent les caractéristiques initiales, on obtient un signal intense et cohérent. C'est le principe du LASER (acronyme de **Light Amplification by Stimulated Emission Radiation**). On retrouve ici la caractéristique d'un système bouclé dans lequel une partie du signal de sortie d'un amplificateur est réinjectée en entrée. Nous allons étudier qualitativement les conditions d'amplification spécifiques au LASER.

On remarque tout d'abord que l'émission induite joue un rôle opposé à l'absorption, mais qu'elle ne concerne que la population des atomes excités (d'énergie E_2) alors que l'absorption concerne les atomes à l'état fondamental (d'énergie E_1). Dans les conditions standard il faut donc évaluer l'importance relative de ces deux populations pour voir dans quelle mesure le processus d'émission stimulée peut être le processus majoritaire. Pour cela considérons la variation δP , de la puissance d'un faisceau traversant une population d'atomes. Elle est proportionnelle au nombre de photons induits diminué du nombre de photons absorbés :

$$\delta P \propto (B_{21}N_2 - B_{12}N_1)u_\nu$$

Une amplification n'est donc possible que si $\delta P > 0$, soit :

$$\frac{N_2}{N_1} > \frac{B_{12}}{B_{21}} = 1$$

Or, à une température T , le rapport des populations d'atomes est donnée par la loi de Boltzmann et $\frac{N_2}{N_1} < 1$.

On voit que les deux conditions ne peuvent pas être satisfaites simultanément. De manière générale la population des atomes sur leur niveau fondamental est à l'équilibre bien plus importante que celle des atomes dans l'état excité.

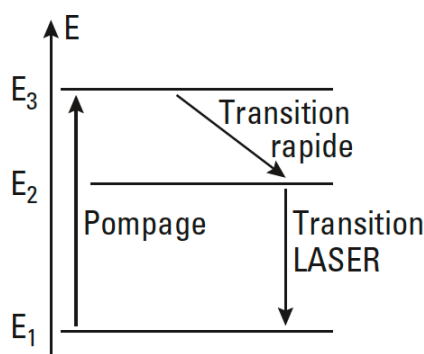
b) Inversion de population

Puisqu'il est impossible de réaliser l'amplification à l'équilibre thermique, il faut employer d'autres techniques pour que le rapport des populations soit inversé. Parmi les différentes techniques utilisées, nous allons présenter la technique dite du *pompage optique* d'une transition optique, qui a un intérêt historique puisqu'il s'agit du cas du rubis avec lequel Maiman réalisa le premier LASER en 1960. Notons qu'il s'agit d'un cas très particulier lié aux propriétés singulières du rubis.

De manière générale il s'agit d'utiliser un 3ème niveau auxiliaire, que l'on va peupler par une excitation extérieure en dépeuplant le niveau fondamental. Ensuite la relaxation de ce 3ème niveau vers le niveau 2 peut permettre de réaliser l'inversion de population. On schématise le matériau comme un système quantique à 3 niveaux, le 3ème niveau étant d'énergie supérieure aux deux autres : $E_3 > E_2 > E_1$. Pour que l'inversion de population fonctionne, on doit choisir un matériau dont le niveau intermédiaire (niveau 2) a une durée de vie suffisamment longue, c'est-à-dire que la probabilité de transition de 2 vers 1 est plus faible que celle de 3 vers 2.

On excite les atomes du niveau fondamental vers le niveau 3. Le niveau 1 est donc fortement dépeuplé. Le niveau 3 se désexcite vers le niveau 2 rapidement. La durée de vie de ce niveau étant suffisamment grande, on se retrouve dans une situation quasi-stationnaire où la population du niveau 2 a été fortement augmentée au détriment du niveau 1. Et on peut entretenir cet "équilibre" en renouvelant l'excitation du système.

On peut ainsi réaliser la condition recherchée : $N_1 < N_2$.



II - Propriétés optiques d'un faisceau limité spatialement

Un LASER présente de très nombreux avantages par rapport à une source lumineuse à décharge classique. Ces avantages sont liés à la cohérence du LASER qui permet de concentrer son énergie dans des domaines très étroits de longueurs d'onde (ou de fréquences), de temps et d'espace.

Les deux premières propriétés ont été vues plus en détail lors de l'étude quantitative de l'optique dite physique (interférences). Notons simplement qu'il est possible de construire des LASER tels qu'une seule fréquence est transmise en sortie de dispositif et avec une largeur spectrale très faible. Ceci implique une cohérence temporelle pratiquement aussi grande qu'on veut, condition indispensable à l'obtention d'interférences lumineuses.

Les densités d'énergie que l'on peut atteindre du fait de la focalisation du faisceau sont prodigieuses. Ainsi un LASER de 15 W peut générer des puissances surfaciques de l'ordre de 10^9 W.cm^{-2} qui sont environ 10^6 fois plus élevées que ce que l'on obtient avec les sources classiques les plus intenses. On peut comprendre ceci en considérant que le faisceau est émis avec une divergence extrêmement faible (10^{-3} radians pour un diamètre de 1 millimètre) alors que les lampes spectrales classiques émettent dans tout l'espace ou dans des demi-espaces. Cette possibilité de concentration de l'énergie a de nombreuses applications dans l'industrie et en médecine par exemple.

1) Profil de faisceau gaussien

Un rayonnement lumineux correspond à la propagation d'une onde électromagnétique. Cette propagation est celle du champ électrique $\vec{E}$, solution de l'équation de D'Alembert :

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

Dans le cas d'un LASER, on montre que le champ électrique obtenu (solution approchée de l'équation de propagation dans le vide), de pulsation ω , se propageant dans la direction Oz , a une amplitude qui s'écrit :

$$E(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[E_0 e^{-\frac{x^2 + y^2}{w^2}} e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2R}} e^{i(kz - \omega t - \phi)} \right]$$

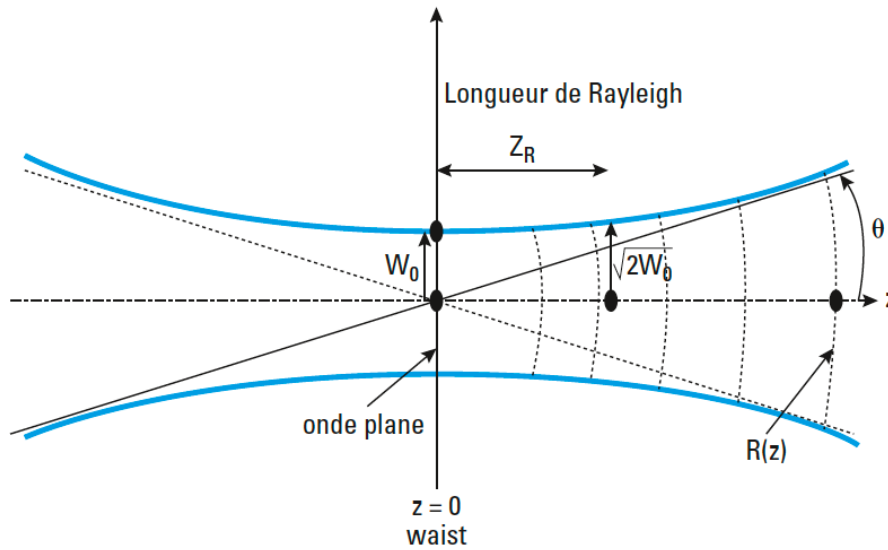
Dans l'expression précédente, on a utilisé :

- E_0 l'amplitude du champ,
- w la taille du faisceau,
- R son rayon de courbure,
- ϕ la phase du champ.

Le champ a clairement une symétrie cylindrique autour de Oz et une extension transverse de l'ordre de w . Son amplitude dans

le plan transverse (plan xOy) a un profil gaussien : $e^{-\frac{x^2 + y^2}{w^2}}$. On voit dans l'expression précédente deux termes de propagation : une onde plane dans le sens des z croissants, et une onde sphérique de rayon R dans le plan transverse. Pour une propagation vers les z positifs, l'onde est divergente si R est positif. Elle est convergente dans le cas contraire ($R < 0$).

On peut représenter le profil de faisceau gaussien comme sur la figure ci-après.



Le point de l'axe Oz où la taille transverse du faisceau est minimum est appelé **point de focalisation** ou **waist** en anglais. En prenant ce point comme origine des coordonnées on peut démontrer que les paramètres précédents ont l'évolution suivante avec z :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$

$$E_0(z) = E_0(0) \cdot \frac{w_0}{w(z)}$$

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right)$$

w_0 est la valeur du waist (dimension transverse dans le plan $z = 0$ avec notre origine). Pour caractériser les variations de la forme du faisceau suivant l'axe Oz (évolution longitudinale) on introduit la **longueur de Rayleigh** z_R :

$$z_R = \pi \frac{w_0^2}{\lambda}$$

telle que la dimension transverse est multipliée par $\sqrt{2}$ entre $z = 0$ et $z = z_R$.

2) Focalisation et diffraction

Tant que l'on est dans la zone $0 < z \ll z_R$ le faisceau lumineux a une section pratiquement constante. En particulier le rayon de courbure $R(z)$ est pratiquement infini dans cette zone : on peut considérer que l'on a un faisceau cylindrique de rayons lumineux parallèles à l'axe Oz dans un domaine de longueur z_R de part et d'autre du col (*waist*). On remarque que le domaine où le faisceau est pratiquement cylindrique est d'autant plus petit que w_0 est petit puisque z_R est proportionnel à w_0 . Ceci est en fait conforme aux lois de la diffraction : plus la dimension transverse est faible, plus la dispersion du faisceau sera importante et donc plus il sera difficile de collimater le faisceau.

On peut confirmer ce phénomène en prenant cette fois la limite $z \gg z_R$. Dans ce cas :

$$w(z) \approx \frac{\lambda}{\pi w_0} z$$

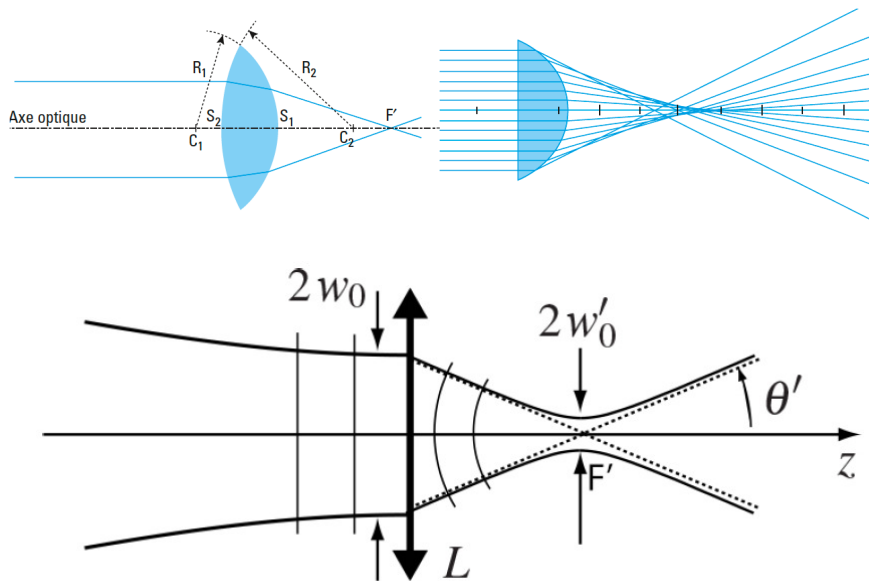
et

$$R(z) \approx z$$

On a alors un faisceau divergent à partir de l'origine des coordonnées. Ce faisceau est délimité par un cône de demi-angle au sommet : $\frac{\lambda}{\pi w_0}$. Cette divergence est donc d'autant plus grande que la taille du faisceau est petite, conformément aux lois de la diffraction. Les rayons typiques étant de l'ordre du millimètre, un LASER dans le domaine de l'optique visible $[0.4, 0.8] \mu\text{m}$ a une dispersion typique : $\delta\alpha \sim \frac{\lambda}{\pi w_0} \approx 10^{-4} - 10^{-3} \text{ rad}$.

Cette directivité excellente est mise à profit lorsque l'on cherche à matérialiser une droite, par exemple pour le guidage ou pour des usages télémétriques. On peut effectivement mesurer des distances avec une grande précision en mesurant le temps mis par la lumière LASER pour faire un aller-retour. Pour les usages extrêmes on améliore encore la collimation en augmentant le diamètre du faisceau (au prix d'une moindre concentration en énergie) ou en utilisant des systèmes de lentilles. On peut ainsi réduire la divergence du faisceau à mieux que 10^{-6} radians. Dans la mesure de la distance terre-lune, le faisceau envoyé a un rayon de seulement 300 mètres lorsqu'il arrive à la surface de la lune où il se réfléchit sur un système catadioptrique déposé par une mission Apollo. Les quelques photons captés sur terre après l'aller-retour permettent de mesurer la distance parcourue.

Rappelons enfin que l'utilisation de lentilles convergentes ou divergentes permet de passer d'un faisceau cylindrique à un faisceau cône et réciproquement. Les schémas obtenus sur la figure ci-après dans le cas d'une lentille convergente illustrent ce phénomène.



En complément, je propose le principe de l'élargisseur de faisceau

