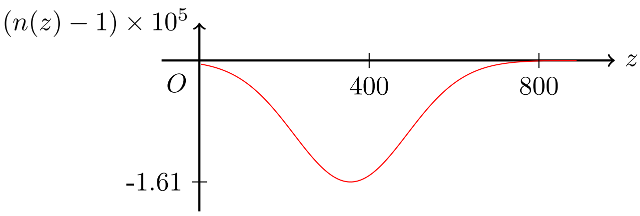
Problème 1 : l'ionosphère

1. Le poids de l'électron est de l'ordre de 10^{-29} N alors que la force électrique est de l'ordre de 10^{-19} N. Le poids est donc bien négligeable.
   La force de Lorentz s'écrit $\overrightarrow{F} = -e\left(\overrightarrow{E} + \vec{v}_e \wedge \overrightarrow{B}\right)$.
   Le terme dû au champ magnétique est de l'ordre de ev_eB_0, et celui dû au champ électrique est de l'ordre de eE_0, avec $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$ pour une OPPH, donc $ev_eB_0 = \dfrac{v_e}{c}eE_0$.
   Pour un électron non relativiste, $v_e << c$, et on peut négliger le terme dû au champ magnétique.
2. On applique le PFD à un électron dans le référentiel d'étude supposé galiléen :
   $m_e\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\overrightarrow{E}$, donc en notation complexe, $m_e i\omega\underline{\vec{v}} = -e\underline{\overrightarrow{E}}$.
   On en déduit que $\underline{\vec{v}} = \dfrac{-e}{im_e\omega}\underline{\overrightarrow{E}}$, et on peut ensuite écrire le vecteur densité de courant $\underline{\vec{j}} = -en_e\underline{\vec{v}} = \dfrac{n_e e^2}{im_e\omega}\underline{\overrightarrow{E}}$.
   D'après la loi d'Ohm locale, $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\overrightarrow{E}}$, donc $\underline{\gamma} = \dfrac{n_e e^2}{im_e\omega}$.
   Si la conductivité est imaginaire pure, cela signifie que la puissance moyenne dissipée par effet Joule est nulle.
3. Les équations de Maxwell dans un milieu neutre de conductivité $\underline{\gamma}$ s'écrivent $\begin{cases} div\underline{\overrightarrow{E}} = 0 \\ div\underline{\overrightarrow{B}} = 0 \\ \overrightarrow{rot}\underline{\overrightarrow{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t} \\ \overrightarrow{rot}\underline{\overrightarrow{B}} = \mu_0\underline{\gamma}\underline{\overrightarrow{E}} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} \end{cases}$
   On a $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\underline{\overrightarrow{E}}) = \overrightarrow{grad}(div\underline{\overrightarrow{E}}) - \overrightarrow{\Delta}\underline{\overrightarrow{E}}$, soit $-\overrightarrow{\Delta}\underline{\overrightarrow{E}} = -\overrightarrow{rot}\left(\dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\underline{\gamma}\underline{\overrightarrow{E}} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t}\right)$.
   On en déduit que $\overrightarrow{\Delta}\underline{\overrightarrow{E}} = \mu_0\underline{\gamma}\dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2}$.
   La relation de dispersion s'écrit $-k^2 = i\omega\mu_0\underline{\gamma} - \dfrac{\omega^2}{c^2}$, soit $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\mu_0 n_e e^2}{m_e} = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{n_e e^2}{\epsilon_0 c^2 m_e}$.
   On posant $\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$, on obtient $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$.
4. Dans la partie basse de l'ionosphère, la densité de molécules d'air est encore élevée, les collisions entre électrons et ions sont fréquentes ; un électron peut retrouver rapidement un ion positif : la recombinaison est rapide et n_e est faible . Dans les couches les plus hautes, la recombinaison est plus lente donc il y a plus d'électrons libres et n_e augmente.
   Au delàà de 350 km, la densité de molécules d'air est encore plus faible, donc il y a très peu d'électrons libérés et n_e devient de plus en plus faible.
5. $f_p = 9$ MHz. Les ondes se propagent si k est réel, donc si la fréquence est supérieure à f_p. Un satellite dont l'altitude est supérieure à 1000 km doit donc utiliser des fréquences supérieures à 9 MHz pour communiquer avec la Terre.
6. La vitesse de phase vaut $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{fc}{\sqrt{f^2 - f_p^2}}$.
   On en déduit l'indice optique $n = \sqrt{1 - \dfrac{f_p^2}{f^2}}$, indice qui est inférieur à 1.
7. Comme $f_p << f_1$, on a $n \simeq 1 - \dfrac{f_p^2}{2f_1^2} = 1 - \dfrac{e^2}{8\pi^2 m_e\epsilon_0}\dfrac{n_e}{f_1^2}$.
   En posant $a = \dfrac{e^2}{8\pi^2 m_e\epsilon_0}$, on a bien $n \simeq 1 - a\dfrac{n_e}{f_1^2}$.

   $n(z) - 1 = -a\dfrac{n_e}{f_1^2}$.
   Cette grandeur est donc nulle pour $z = 0$ et $z > 800$ km, et elle est minimale pour $z \simeq 350$ km.



8. Entre 1000 et 350 km, n_e augmente, donc n diminue. D'après les lois de Descartes, cela signifie que l'onde a un angle plus élevé par rapport à la normale, donc c'est le tracé (a) qui est correct.

9. Le temps de parcours de l'onde qui se propage dans le vide vaut $\dfrac{H_0}{c} = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^{H_0} dz$, et le temps de parcours de l'onde dans l'ionosphère vaut $\displaystyle\int_0^{H_0} \frac{dz}{v_g} = \frac{1}{c}\int_0^{H_0} \frac{c}{v_g} dz$.

   On obtient donc bien $\tau_1 = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^{H_0} \frac{c}{v_g} dz - \frac{1}{c}\int_0^{H_0} dz = \frac{1}{c}\int_0^{H_0} \left(\frac{c}{v_g} - 1\right) dz$.

   $L_1 = \displaystyle\int_0^{H_0} \left(\frac{c}{v_g} - 1\right) dz$, avec $\dfrac{c}{v_g} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{f_p^2}{f_1^2}}} \simeq 1 + \dfrac{f_p^2}{2f_1^2} = 1 + a\dfrac{n_e}{f_1^2}$.

   On en déduit que $L_1 \simeq \dfrac{a}{f_1^2}\displaystyle\int_0^{H_0} n_e dz = \frac{a}{f_1^2} C_{ET}$.

10. Le C_{ET} correspond à l'aire sous la courbe de la figure 6, soit environ 3.10^{17} m^{-2}.

    On en déduit que $L_1 = 5$ m. Cette précision est acceptable.

11. $\tau_{\text{ret}} = \dfrac{aC_{ET}}{c}\left(\dfrac{1}{f_1^2} - \dfrac{1}{f_2^2}\right)$, donc $C_{ET} = \dfrac{c\tau_{\text{ret}}}{a\left(\dfrac{1}{f_1^2} - \dfrac{1}{f_2^2}\right)} = 1,9.10^{19}$ m^{-2}.

    On en déduit que $L_1 = 311$ m. Cette valeur est très élevée à cause des fluctuations du C_{ET}.