

Tout résultat d'un calcul devra présenter le bon nombre de chiffres significatifs. La notation tiendra largement compte du soin apporté à la rédaction. Encadrer les résultats.

### Problème 1 : l'ionosphère

L'ionosphère est la partie de l'atmosphère située au-delà de 70 km d'altitude. Il s'agit d'un plasma raréfié, partiellement ionisé par le rayonnement solaire. L'ionisation est mesurée par la densité volumique  $n_e$  d'électrons libres.

Les électrons libres, de masse  $m_e$  et de charge  $-e$ , présents dans l'ionosphère, interagissent avec une onde électromagnétique incidente pour modifier les caractéristiques de celle-ci, qui présente alors, en particulier, une avance de phase et un retard de groupe par rapport à une propagation dans le vide. On cherche ici à quantifier ces décalages puis à compenser ceux-ci.

**Dans toute cette partie du problème, on négligera l'influence des cations devant celle des électrons libres. De plus, on considérera que le plasma reste localement neutre.**

On considère une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique, se propageant dans le plasma selon un axe  $Ox$ . Les champs électrique et magnétique de l'onde, en notation complexe, sont donnés respectivement par :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - kx)},$$

$i$  représente l'imaginaire :  $i^2 = -1$ .

**Q1** Justifier quantitativement que le poids de l'électron est négligeable devant la force exercée par le champ électrique, en considérant par exemple un champ électrique  $\|\vec{E}\| = 1 \text{ V.m}^{-1}$ . Écrire l'expression de la force de Lorentz sur un électron de vitesse  $\vec{v}_e$ . Montrer que, pour un électron non relativiste, on peut négliger le terme dû au champ magnétique de l'onde devant le terme dû au champ électrique. On admet que  $\|\vec{B}\|$  est du même ordre de grandeur que pour une onde plane progressive dans le vide.

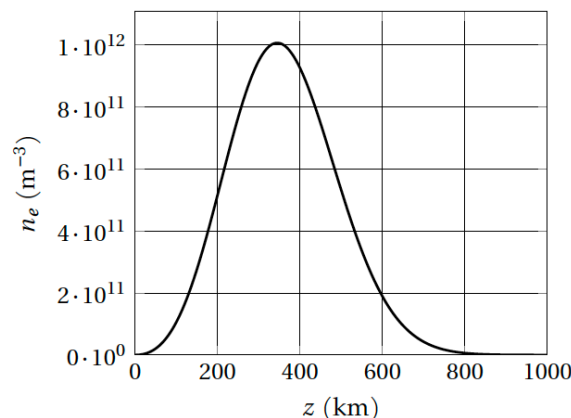
**Q2** Écrire l'équation du mouvement d'un électron libre de vitesse (complexe)  $\vec{v}_e$  soumis à la seule influence du champ électrique  $\vec{E}(x, t)$  de l'onde. En déduire que le plasma possède une conductivité complexe  $\underline{\gamma} = \frac{n_e e^2}{im_e \omega}$ . Quelle interprétation énergétique peut-on donner au caractère imaginaire pur de la conductivité (on ne demande pas de démonstration) ?

**Q3** Écrire les équations de Maxwell avec leur nom. Comment se simplifient-elles dans un milieu localement neutre et de conductivité  $\underline{\gamma}$  ? En déduire l'équation de propagation pour le champ électrique  $\vec{E}(x, t)$  puis l'équation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

où la pulsation plasma  $\omega_p$  a pour expression  $\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}}$ .

**Q4** La figure ci-dessous présente la densité d'électrons libres  $n_e$  en fonction de l'altitude  $z$ . Comment interpréter la croissance de cette densité pour les altitudes  $z < 350 \text{ km}$  ? Pourquoi chute-t-elle pour les altitudes plus élevées ?



**Q5** Évaluer la fréquence plasma  $f_p$  déduite de la pulsation plasma  $\omega_p$  pour la densité maximale d'électrons libres. Quelle est la bande de fréquence utilisable pour les communications entre un satellite dont l'altitude est supérieure à 1 000 km et la Terre ?

On considère dans toute la suite que l'on se situe dans cette bande de fréquence.

**Q6** Exprimer la vitesse de phase  $v_\varphi$  des ondes électromagnétiques dans le plasma en fonction de  $f$ ,  $c$  et  $f_p$ . En déduire l'expression de l'indice optique  $n = \frac{c}{v_\varphi}$  en fonction de  $f$  et de  $f_p$ . Quelle est la particularité de cet indice ?

La fréquence de l'onde électromagnétique est  $f_1 = 1575 \text{ MHz}$ .

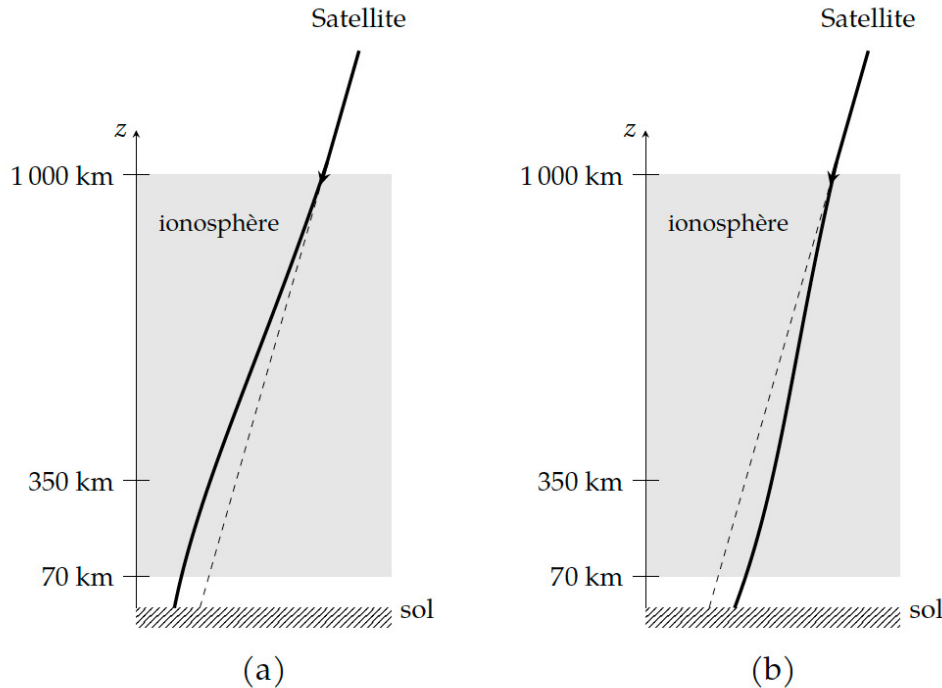
**Q7** Montrer que l'indice optique local peut s'écrire :

$$n \approx 1 - a \frac{n_e}{f_1^2}$$

où  $a = \frac{e^2}{8\pi^2 m_e \epsilon_0}$ . Tracer la fonction  $(n(z)-1) \cdot 10^5$  après avoir évalué ses extrema.

On suppose que l'ionosphère s'arrête à l'altitude  $H_0 = 1000$  km.

**Q8** On a tracé sur la figure ci-dessous deux trajets possibles d'une onde électromagnétique harmonique traversant l'ionosphère et soumis à la variation de l'indice optique (*le tracé pointillé correspond à la ligne droite depuis le satellite. On néglige la rotondité de la Terre*). Quel est le bon tracé ? Justifier.



On considère un paquet d'ondes de fréquence centrale  $f_1$  émis par un satellite en haute altitude ( $z > H_0 = 1000$  km) et reçu par un récepteur au sol ( $z = 0$ ) à la verticale du satellite. On note  $\tau_1$  le retard provoqué par la présence de l'ionosphère par rapport à une onde qui se propagerait dans le vide selon le même trajet et  $L_1 = c\tau_1$  l'erreur de distance due à l'ionosphère.

**Q9** Montrer que  $\tau_1 = \frac{1}{c} \int_0^{H_0} \left( \frac{c}{v_g} - 1 \right) dz$ , où  $v_g$  est la vitesse de groupe de l'onde.

Sachant que  $v_g = c \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f_1^2}}$ , montrer que  $L_1 \approx \frac{a}{f_1^2} C_{ET}$  où  $C_{ET} = \int_0^{H_0} n_e dz$  est appelé "Contenu Electronique Total de l'ionosphère".

**Q10** Estimer le  $C_{ET}$  en  $m^{-2}$  pour la densité  $n_e$  de la figure de la question **Q4** et en déduire l'erreur de distance  $L_1$  provoquée par l'ionosphère. Commenter.

La valeur du  $C_{ET}$  fluctue principalement selon l'activité solaire et l'alternance jour-nuit. La correction nécessaire ne peut être connue en temps réel si l'on n'utilise qu'une seule fréquence de signal. C'est pourquoi les signaux GPS utilisent deux fréquences,  $f_1$  et  $f_2 = 1228$  MHz.

**Q11** Soit  $\tau_{ret} = \tau_1 - \tau_2$  le retard de réception entre les deux signaux de fréquences  $f_1$  et  $f_2$ . Montrer que la mesure de  $\tau_{ret}$  permet de déterminer le  $C_{ET}$  à une date donnée. Application numérique : on mesure  $\tau_{ret} = 6,7 \cdot 10^{-7}$  s. Calculer l'erreur  $L_1$ .

FIN DE L'ÉNONCÉ