

# Centrale MP 2025 - Physique Chimie 2 :

## Faire l'image d'une exoplanète

Corrigé proposé par Sylvain Condamin.

### Partie A - Utilisation du phénomène d'interférence

#### I- Principe de la mesure sur un système équivalent

- On construit les rayons (les rayons émergents sont tous parallèles), et on utilise le théorème de Malus :  $(S_A T_1) = (S_A I)$ , ce qui permet d'obtenir  $\delta_{source} = a \sin \frac{\alpha}{2}$ , soit  $\boxed{\delta_{source} = \frac{a\alpha}{2}}$  (cf. figure 1)

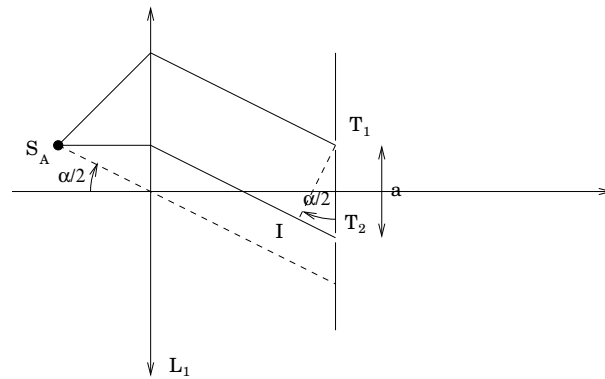


FIGURE 1 – construction des rayons pré-lentille. Note : le sens positif des angles est horaire.

- On a  $s_1(t) = s_0 \cos(\omega t - k(S_1 T_1 M))$  et  $s_2(t) = s_0 \cos(\omega t - k(S_2 T_1 M))$ .
- $I = \gamma \langle s(t) \rangle$ , où  $\gamma$  est un coefficient de proportionnalité dépendant de la nature du signal scalaire choisi.

$$\text{Donc } \boxed{I = \gamma \langle s_1^2 \rangle + 2\gamma \langle s_1 s_2 \rangle + \gamma \langle s_2^2 \rangle}.$$

On a par ailleurs  $I_0 = \gamma \frac{s_0^2}{2}$ , ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} I(\delta) &= 2I_0 + 4I_0 \langle \cos(\omega t - k(S_1 T_1 M)) \cos(\omega t - k(S_1 T_2 M)) \rangle \\ &= 2I_0 + 2I_0 \langle \cos(2\omega t - k(S_1 T_1 M) - k(S_1 T_2 M)) + \cos(k(S_1 T_2 M) - k(S_1 T_1 M)) \rangle \\ &= 2I_0 (1 + \cos [k(\delta_{source} + \delta)]) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat demandé.

- Les deux sources sont incohérentes, il n'y a donc pas d'interférence entre elles. L'intensité totale est donc la somme des intensités dues aux sources  $S_A$  et  $S_B$  ; l'intensité due à  $S_B$  est simplement obtenue en remplaçant  $\alpha$  par  $-\alpha$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
I_d(\delta) &= 2I_0 \left( 1 + \cos \left[ k \left( \frac{a\alpha}{2} + \delta \right) \right] \right) + 2I_0 \left( 1 + \cos \left[ k \left( \frac{-a\alpha}{2} + \delta \right) \right] \right) \\
&= 4I_0 \left( 1 + \cos(k\delta) \cos \left( \frac{ka\alpha}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché, avec  $I_{d,0} = 4I_0$ .

5. cf. figure 2

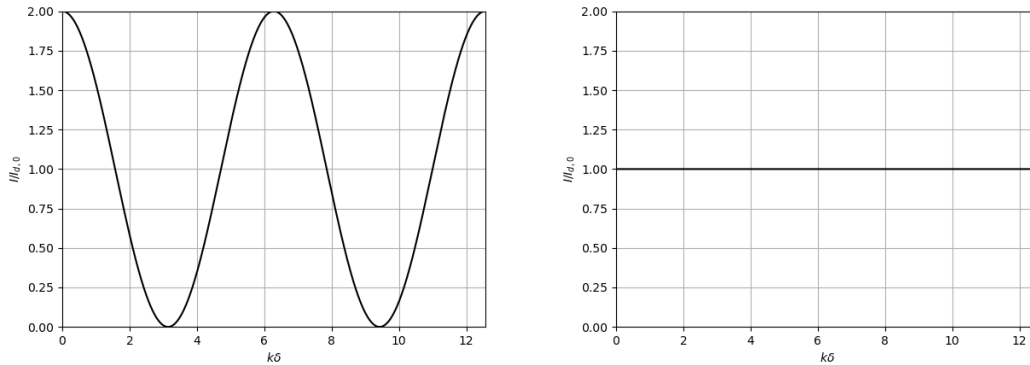


FIGURE 2 – Gauche : Intensité pour un facteur de cohérence égal à 1 ; Droite : intensité pour un facteur de cohérence nul.

6.  $\boxed{\frac{ka}{2} = \frac{\pi a}{\lambda_0} = 967}$

7. L'énoncé n'indique pas d'incertitude sur  $a$  on peut donc considérer que celle-ci est nulle. On a alors simplement, en notant  $\beta = \frac{ka}{2}$ , et  $u(x)$  l'incertitude-type sur  $x$ ,

$$\frac{u(\beta)}{\beta} = \frac{u(\lambda_0)}{\lambda_0}.$$

Soit  $\boxed{u(\beta) = \frac{\beta}{\lambda_0} u(\lambda_0) = 45}$ .

8. On peut lire  $I_{max} = 112$  u.a et  $I_{min} = 50$  u.a, et donc  $\boxed{C = 0,38}$ .

NB : La figure ne correspond pas à l'expression de la question 4, car on a un phénomène de diffraction (par les fentes d'Young) qui se superpose aux interférences, et conduit à un  $I_0$  dépendant de  $\delta$ . Idéalement, il faudrait sans doute extrapoler l'intensité des minima à ce que ce serait au centre de la figure, ce qui donnerait  $I_{min} = 52$ , mais ce n'est pas ce que demande l'énoncé.

9. Cf. figure 3.

10. Il est possible de le faire via une méthode de Monte-Carlo : répéter l'ajustement avec des points pris au hasard dans la distribution de probabilité associée à chaque point de mesure. On peut alors déterminer l'écart-type sur chaque paramètre de la simulation.

NB : On se serait attendu a priori à  $C_0 = 1$ , mais d'autres effets vont contribuer à diminuer le contraste, en premier lieu la largeur non-nulle des fentes sources.

11. On a  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2f_1}$ , soit  $\alpha = \frac{d}{f_1}$ , et donc  $\boxed{d = \alpha f_1 = 508 \mu\text{m}}$ .

Comme l'incertitude sur  $f_1'$  est négligée, on a par ailleurs  $\boxed{u(d) = f_1' u(\alpha) = 9 \mu\text{m}}$

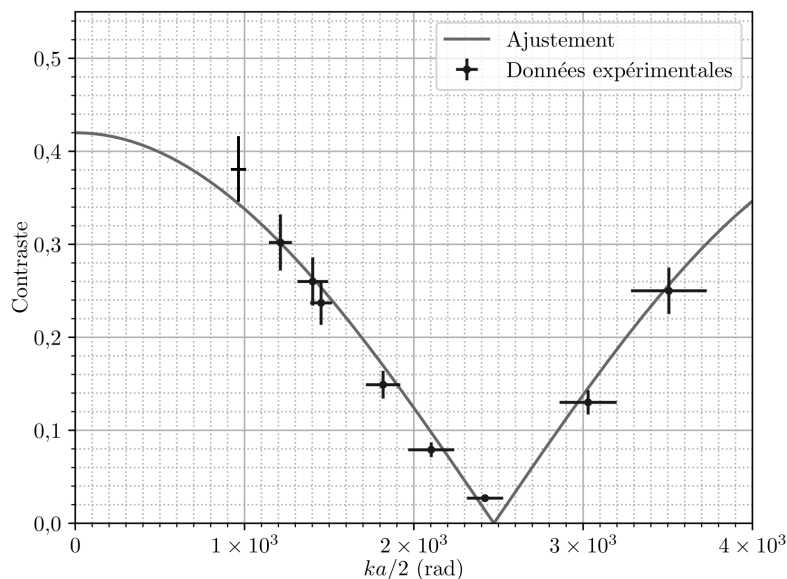


FIGURE 3 – Figure du document réponse, avec le point supplémentaire.

12. Dans ce cas chaque source donne une image à l'infini, inclinée de  $\pm\alpha/2$ , par la lentille  $L_1$ , puis des images sur le plan focal image, à des positions  $\pm f'_2\alpha/2$ .

La distance  $d'$  entre les deux images sur le plan focal image vaut donc  $d' = f'_2\alpha = \frac{f'_2}{f'_1}d$ .

On peut estimer  $d' = 32 \mu\text{m}$ . Pour estimer  $u(d')$ , le plus rigoureux est de dire que les deux maxima sont estimées avec une tolérance de  $2 \mu\text{m}$  (puisque les points de mesure sont tous les  $4 \mu\text{m}$ ), et donc une incertitude-type de  $\frac{2}{\sqrt{3}} \mu\text{m}$ .  $d'$  est une différence entre ces deux mesures, les carrés des incertitudes-type s'ajoutent, ce qui donnerait  $u(d') = \sqrt{\frac{2}{3}}2 \mu\text{m} = 1,6 \mu\text{m}$ .

On obtient alors  $d = \frac{f'_1}{f'_2}d' = 457 \mu\text{m}$ , et  $u(d) = \frac{f'_1}{f'_2}u(d') = 23 \mu\text{m}$

Pour discuter de la compatibilité des deux résultats, on peut calculer l'écart normalisé :

$$E_N = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{u(d_1)^2 + u(d_2)^2}} = 2,1$$

(où  $d_1$  et  $d_2$  correspondent aux deux évaluations de  $d$ )

La compatibilité des deux résultats est discutable. Le critère habituel est de considérer que les résultats sont compatibles si  $E_N < 2$ , mais, dans la mesure où on est très proche de cette limite, obtenir un tel écart par hasard peut être considéré comme improbable, mais pas impossible...

## II - Interférences à deux télescopes

13. On a, en utilisant le théorème de Malus de la même façon qu'à la question 1,  $(A_0T_2) - (A_0T_1) = a\frac{\alpha}{2}$ .

La différence de marche totale vaut donc  $\delta = a\frac{\alpha}{2} + \delta_r$ . La situation est donc très similaire à celle de la question 1, à ceci près que la figure d'interférences ne sera pas obtenue d'un coup, mais en modifiant la compensation de la ligne à retard.

NB : L'énoncé passe sous silence le fait que le premier rôle de la ligne à retard est de compenser la différence de marche entre les télescopes, liée au fait que l'objet observé n'est pas au zénith, et que cette différence de marche varie avec le temps en raison de la rotation de la Terre.

14.  $\alpha_{res} = \frac{\lambda_0}{2a} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ rad}$

La résolution spatiale  $d$ , à une distance  $l$ , vaut  $d = \alpha_{res} l = 2,36 \cdot 10^6 \text{ km}$ .

Cette distance correspond plus à la taille d'une étoile qu'à celle de Jupiter. On ne peut donc pas espérer obtenir une image détaillée de l'exoplanète.

NB : Ce n'est d'ailleurs pas le but de la mission : si la résolution est insuffisante pour imager la planète, elle est en revanche suffisante pour distinguer l'étoile et la planète, ce qui permet de réaliser des analyses spectroscopiques sur la planète et donc d'obtenir des informations sur son atmosphère.

## Partie B - Utilisation d'une lentille gravitationnelle

15. On a  $\tan \chi = \frac{R_s}{SF_B}$ , donc  $SF_0 = \frac{R_s}{\chi} = \frac{R_s^2}{2r_{sch}} = 8,21 \cdot 10^{13} \text{ m} = 54,7 \text{ u.a.}$

Le foyer en question est donc au-delà de l'orbite de Neptune.

16. Un observateur situé entre  $S$  et  $F_0$  ne recevra aucun rayon venant de  $A_0$  (le cône de sommet  $F_0$  et de base le Soleil correspond à la zone dans laquelle aucun rayon issu de  $A_0$  ne peut parvenir). Il ne pourra donc pas exploiter l'effet de lentille gravitationnelle pour voir  $A_0$ ; en revanche, s'il se situe entre  $F_0$  et  $F_b$ , il recevra des rayons venant de  $A_0$  sur un cône centré sur le Soleil.

17. Pour une lentille mince, les rayons convergent tous au foyer; ce n'est pas le cas pour une lentille gravitationnelle, puisque la déviation des rayons diminue avec la distance à l'axe optique.

18. Un théorème de Thalès donne  $\frac{A_1 B_1}{SA_1} = \frac{A_0 B_0}{SA_0}$ , soit  $A_1 B_1 = \frac{SA_1}{SA_0} A_0 B_0$ .

19. Les taches centrales ont des demi-largeurs de 0,1 m (correspondant à la position du premier zéro). Il faut donc que les deux centres des taches soient séparés de deux fois cette demi-largeur, soit  $\rho_{min} = 0,2 \text{ m}$ , pour qu'elles ne se recouvrent pas.

20. On a  $A_0 B_0 = \frac{SA_0}{SA_1} \rho_{min} = 2,10 \text{ km}$

Cette méthode pourrait donc a priori permettre de distinguer différents points de l'exoplanète, et donc de l'imager avec une résolution de l'ordre de quelques kilomètres.

21. Quand la sonde s'éloigne du Soleil, les rayons parvenant à la sonde passent plus loin du Soleil et sont donc moins déviés (cf. figure 7 de l'énoncé). Le rayon angulaire de l'anneau d'Einstein est donc plus faible (mais la taille apparente du Soleil diminue également, et plus vite, il peut donc être plus facile de séparer l'anneau d'Einstein du Soleil).

22. La puissance lumineuse collectée par la lentille gravitationnelle correspond à la puissance lumineuse arrivant dans une couronne entre les rayons  $b$  et  $b+D$ , qui a donc une surface  $S_l = 2\pi bD$  (périmètre du cercle  $\times$  épaisseur).

En cas d'observation directe la puissance lumineuse collectée est celle arrivant dans le disque de rayon  $D/2$  et de surface  $S_d = \pi(D/2)^2$ .

On a donc  $\mu = \frac{S_l}{S_d} = \frac{8b}{D}$ .

Numériquement on a pour le cas cité par l'énoncé  $\mu = 5,6 \cdot 10^9$ . Cette amplification est en effet considérable (et est même encore un peu plus élevée dans le cas réel puisque  $d > R_s$ : le graphe de la figure 8 de l'énoncé indique d'ailleurs une amplification maximale un peu plus de 2 fois supérieure,

ce qui montre que le calcul donne le bon ordre de grandeur), et on peut imaginer qu'on aie une chance de détecter le signal correspondant, avec des détecteurs assez sensibles (n'oublions pas cependant que, même amplifié, on parle d'un signal provenant d'une zone de quelques kilomètres carrés!)

## Partie C - Propulsion de la sonde

23. 
$$E_{ph} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}; p_{ph} = \frac{h}{\lambda}.$$

24. La surface "vue" par l'onde incidente est  $S \cos \beta$ . La puissance reçue par la voile solaire est donc  $I_s S \cos \beta$ , et l'énergie est  $\delta E = I_s S \cos \beta \delta t$ . Le nombre de photons vaut donc

$$\delta N = \frac{\delta E}{E_{ph}} = \frac{I_s S \cos \beta \delta t}{hc}.$$

25. La force  $\vec{F}$  exercée par les photons sur la voile solaire est l'opposé de celle exercée par la voile solaire sur les photons. On a donc  $-\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{photons}}{dt}$ .

Or  $d\vec{p}_{photons} = \delta N(\vec{p}_r - \vec{p}_i)$ , où  $\vec{p}_r = p_{ph}(-\cos \beta \vec{e}_x + \sin \beta \vec{e}_z)$  est la quantité de mouvement des photons réfléchis et  $\vec{p}_i = p_{ph}(\cos \beta \vec{e}_x + \sin \beta \vec{e}_z)$  est la quantité de mouvement des photons incidents ( $\vec{e}_z$  désignant l'axe dirigé vers le haut de la feuille).

On a donc  $d\vec{p}_{photons} = -2\delta N p_{ph} \cos \beta \vec{e}_x$ .

D'où, en remplaçant tout :

$$\vec{F} = \frac{2I_s S \cos^2 \beta}{c} \vec{e}_x.$$

On obtient donc bien une force de la forme  $\vec{F} = S p_r \vec{e}_x$ , analogue donc à une force de pression.  $p_r$  a bien la forme demandée.

26. La force obtenue à l'aide de l'expression précédente vaut :

$$\vec{F} = \frac{2I_s S}{c} = 1,57 \text{ mN}.$$

C'est donc le bon ordre de grandeur, mais un peu trop optimiste. La raison de l'écart est très certainement que tous les photons ne sont pas réfléchis : une partie peut être transmise et une autre absorbée.

## II - Voile solaire orthogonale au rayonnement solaire

27. Un PFD projeté sur  $\vec{e}_r$  donne  $-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_s}{r^2}$ , ce qui donne immédiatement l'expression demandée, qui est un avatar de la 3e loi de Kepler (car  $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$ ).

On en déduit 
$$v_T = R_T \omega_T = \sqrt{\frac{GM_s}{R_T}}.$$

NB : La 3e loi de Kepler s'écrivant en général  $\frac{T^2}{a^3} = cste$ , l'écriture de cette question me paraît douteuse.

28. Les deux forces s'appliquant sur la sonde (force gravitationnelle et force de pression de radiation) sont toutes les deux radiales : leur moment par rapport à  $O$  est donc nul, et le moment cinétique est conservé d'après le théorème éponyme.

Par ailleurs  $\vec{L}_O = m\vec{OM} \wedge \vec{v} = mr\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ , ce qui donne le résultat demandé.

29. On a  $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$ .

Cela donne :

$$dE_p = \frac{GmM_s - p_T R_T^2 S}{r^2} dr, \text{ soit } \boxed{E_{p,g} = -\frac{GmM_s - p_T R_T^2 S}{r}}.$$

NB : la force radiative varie en  $1/r^2$  en raison de la diminution de l'intensité solaire, liée au fait que la puissance solaire sur une sphère est indépendante de cette dernière. Je suis surpris que l'énoncé ne l'aie même pas évoqué...

30.

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mv^2 + E_p \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GmM_s - p_T R_T^2 S}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GmM_s - p_T R_T^2 S}{r}, \end{aligned}$$

ce qui est la forme recherchée avec  $\boxed{E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM_s - p_T R_T^2 S}{r}}$

31. L'énergie potentielle effective admet un extrémum s'il existe un point où sa dérivée est nulle. Or :

$$\frac{dE_{p,eff}}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{GmM_s - p_T R_T^2 S}{r^2}.$$

La dérivée est nulle pour  $r = \frac{mC^2}{GmM_s - p_T R_T^2 S}$ . Ce point doit être positif pour correspondre à un extrémum, la condition recherchée est donc

$$\boxed{S < S_{lim} = \frac{GmM_s}{p_T R_T^2}}.$$

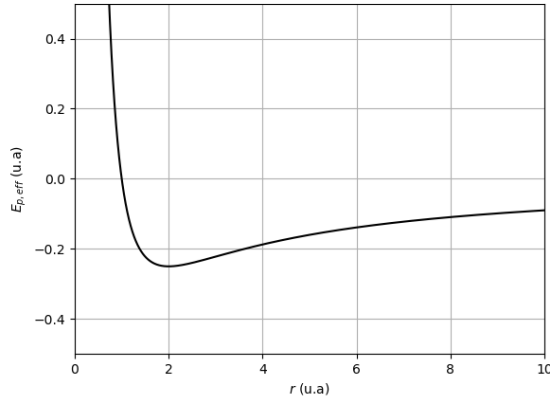


FIGURE 4 – Allure de l'énergie potentielle effective (en unités arbitraires)

L'allure de la courbe est donnée figure 4. La sonde aura une trajectoire liée (et donc elliptique car la force totale est newtonienne) si  $E_m < 0$ , et libre (donc hyperbolique pour les mêmes raisons) si  $E_m > 0$ . La trajectoire sera parabolique pour  $E_m = 0$ .

32. Immédiatement après l'ouverture de la voile,

$$\begin{aligned}
E_m &= E_p(R_T) + \frac{1}{2}mv_T^2 \\
&= -\frac{GmM_s - p_T R_T^2 S}{R_T} + \frac{GmM_s}{2R_T} \\
&= p_T R_T S - \frac{GmM_s}{2R_T}.
\end{aligned}$$

L'énergie mécanique est donc positive si

$$S > \frac{GmM_s}{2p_T R_T^2} = \frac{1}{2}S_{lim} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ m}^2.$$

### Influence de l'orientation de la voile sur le mouvement

33. On part du PFD, et on adimensionne :

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} &= -\frac{GmM_S}{r^2} \vec{e}_r + \frac{p_T R_T^2}{r^2} \cos^2 \beta S \vec{u} \\
\Rightarrow m R_T \omega_T^2 \frac{d^2 \vec{\rho}}{d\tau^2} &= -\frac{GmM_S}{R_T^2} \frac{1}{\rho^2} \vec{e}_r + p_T S \cos^2 \beta \frac{1}{\rho^2} \vec{u} \\
\Rightarrow \frac{GmM_S}{R_T^2} \frac{d^2 \vec{\rho}}{d\tau^2} &= -\frac{GmM_S}{R_T^2} \frac{1}{\rho^2} \vec{e}_r + p_T S \cos^2 \beta \frac{1}{\rho^2} \vec{u} \\
\Rightarrow \frac{d^2 \vec{\rho}}{d\tau^2} &= -\frac{1}{\rho^2} \vec{e}_r + \frac{R_T^2 p_T S}{GmM_S} \cos^2 \beta \frac{1}{\rho^2} \vec{u},
\end{aligned}$$

ce qui est la relation demandée avec  $\eta = \frac{R_T^2 p_T S}{GmM_S} = \frac{S}{S_{lim}}$ .

$\eta$  est une grandeur adimensionnée qui correspond au rapport entre la surface de la voile et la surface limite, ou le rapport entre la force de pression et la force de gravité quand la voile est face au Soleil.

34. On commence par écrire  $\frac{d^2 \vec{\rho}}{d\tau^2}$  :

$$\frac{d\vec{\rho}}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} \vec{e}_r + \rho \frac{d\theta}{d\tau} \vec{e}_\theta, \text{ donc :}$$

$$\frac{d\vec{\rho}}{d\tau} = \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} \vec{e}_r + 2 \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} \vec{e}_\theta + \rho \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} \vec{e}_\theta - \rho \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \vec{e}_r$$

Si on note  $v = \frac{d\rho}{d\tau}$  et  $\omega = \frac{d\theta}{d\tau}$ , le PFD sur  $\vec{e}_r$  s'écrit :

$$\frac{dv}{d\tau} - \rho \omega^2 = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{\eta}{\rho^2} \cos^3 \beta$$

Le PFD sur  $\vec{e}_\theta$  s'écrit :

$$2v\omega + \rho \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\eta}{\rho^2} \cos^2 \beta \sin \beta,$$

ce qui donne deux équations différentielles du système ; les deux dernières sont simplement les équations triviales  $v = \frac{d\rho}{d\tau}$  et  $\omega = \frac{d\theta}{d\tau}$ .

Le système peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\tau} = v \\ \frac{d\theta}{d\tau} = \omega \\ \frac{dv}{d\tau} = \rho\omega^2 - \frac{1}{\rho^2} + \frac{\eta}{\rho^2} \cos^3 \beta \\ \frac{d\omega}{d\tau} = -2\frac{v\omega}{\rho} + \frac{\eta}{\rho^3} \cos^2 \beta \sin \beta \end{cases}$$

35. Les conditions initiales données par l'énoncé sont aisément traduites en variables adimensionnées :

$$\rho(0) = 1, \theta(0) = 0, \frac{d\rho}{d\tau}(0) = 0, \frac{d\theta}{d\tau} = 1.$$

On a donc :

$$\text{cond\_init} = [1,0,0,1]$$

36. **def** voile\_solaire\_beta(y, t, eta, beta):

[rho, theta, v, omega]=y #Extrait les variables du tableau y

drho = v #calcule les dérivées

dtheta = omega

dv = rho \* omega\*\*2 - 1/rho\*\*2 + eta \*np.cos(beta)\*\*3/rho\*\*2

domega = -2\*v\*omega/rho + eta\*np.cos(beta)\*\*2\*np.sin(beta)/rho\*\*3

**return** ([drho, dtheta, dv, domega]) #Retourne le tableau dérivé

37. Ces valeurs de  $\beta$  annulent l'effet de la voile solaire : la sonde reste alors sur sa trajectoire initiale, qui est l'orbite de la Terre.

38. On lit  $\beta_e = 20^\circ, \beta_a = -50^\circ$ .

#### IV - Trajectoire proposée

39. Les trajectoires envisagées sont des trajectoires où la sonde n'est plus liée au Soleil : le but est donc d'obtenir l'énergie mécanique la plus importante possible avant de trop s'éloigner du Soleil, pour avoir la meilleure vitesse de croisière possible. Or, la force de pression de radiation est plus élevée près du Soleil : si on parvient à atteindre la vitesse de libération près du Soleil, cela permet d'obtenir une vitesse terminale plus élevée.

40. La voile est un objet ultraminece, son temps d'équilibrage sera donc a priori très petit, en particulier devant les temps caractéristiques de l'orbite autour du Soleil. On pourra donc estimer sa température en la considérant à l'équilibre : à tout moment  $P_{abs} = 2S\varphi_{ray}$  (la voile émet le rayonnement de deux côtés, donc sur une surface  $2S$ ).

Cela donne un rayon minimal vérifiant :

$$\xi I_s \frac{R_T^2}{r_{min}^2} S \cos \beta = 2S\epsilon\sigma T_{max}^4,$$

soit

$$\frac{r_{min}}{R_T} = \sqrt{\frac{\xi I_s \cos \beta}{2\epsilon\sigma T_{max}^4}} = 0,078$$

(J'ai pris  $\beta = \beta_e$ , en considérant qu'à partir du moment où on cherche à s'éloigner on veut le faire le plus vite possible, mais cela ne change pas grand-chose...)

La lecture de la figure de l'énoncé donne, pour  $r_{min} = 0,078$  au, un temps de parcours d'environ 42 ans, qui représente donc le temps minimal envisageable.