La viscosité

CCMP, Physique 1, PC, 2025.

I La formule de Stokes.

① $Re = \rho \frac{VL}{\eta}$ est le rapport, en ordres de grandeurs, des termes convectif et diffusif de Navier-Stokes :

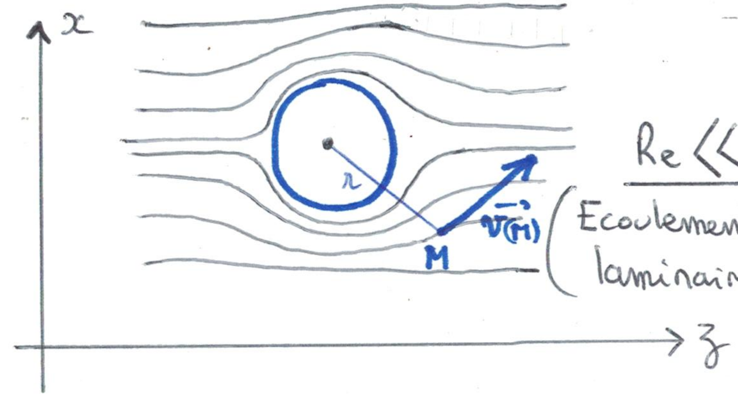
- convectif : $\|\rho(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v}\| \simeq \rho \frac{V^2}{L}$.
- diffusif : $\|\eta \vec{\Delta}\vec{v}\| \simeq \eta \frac{V}{L^2}$.

et $Re = \frac{\text{convectif}}{\text{diffusif}} = \frac{\rho V^2/L}{\eta V/L^2} = \rho \frac{VL}{\eta}$.

Dans l'équation de Navier-Stokes, le terme convectif illustre la capacité de l'écoulement à voir ses couches de fluide se mélanger, la particule fluide traversant des gradients de champ eulérien de vitesse.

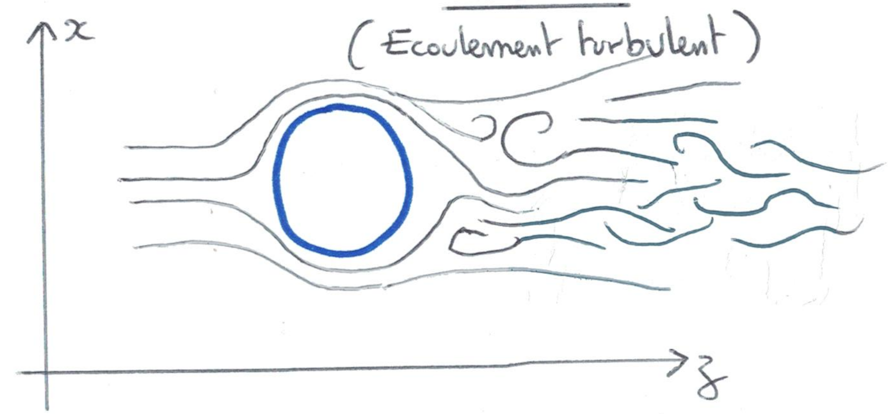
Le terme diffusif (ou visqueux) rend compte des effets dissipatifs découlant de la diffusion de quantité de mouvement entre particules fluides.

②

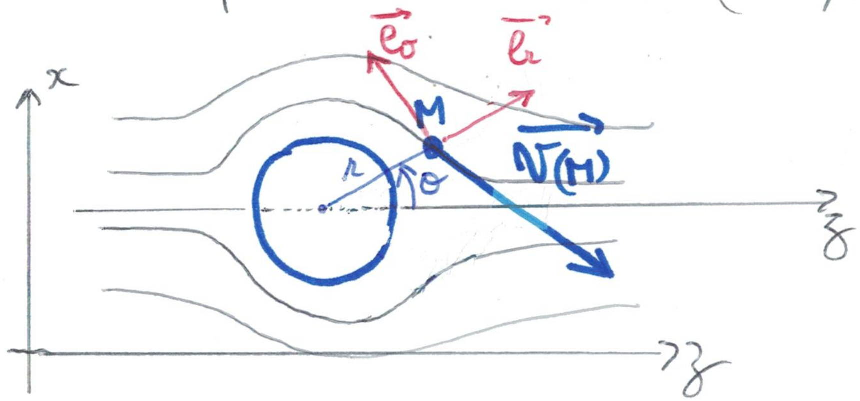


$Re \ll 1$
(Ecoulement laminaire)

$Re > 10^3$
(Ecoulement turbulent)



Paramétrisation pour un écoulement laminaire ($Re \ll 1$) :



③ Pour $Re > 10^3$, la force de traînée s'écrit

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho C_z S\, v.\vec{v}}$$

Elle est la résultante des forces de pression et de cisaillement subies par le fluide, projetée sur la direction de la vitesse.

④ Ecoulement de Stokes : $|F| = 6\pi\eta a v = \frac{\rho}{2} C_z \pi a^2 v^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{C_z = \frac{12\eta}{\rho a v} = \frac{24}{Re}}, \text{ avec } Re = \rho\frac{v(2a)}{\eta}.$$

⑤ Pour $Re \ll 1$, le terme convectif est négligé devant $\eta\vec{\Delta}\vec{v}$.
De plus la pesanteur est négligée, donc en régime stationnaire :

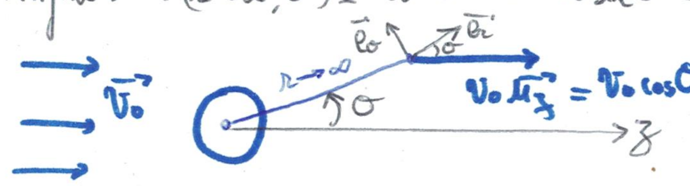
$$\boxed{\vec{0} = -\vec{\text{grad}}\,P + \eta\vec{\Delta}\vec{v}}.$$

⑥ La condition de non-glissement à la surface de la boule imposerait que $\forall\theta$, $\vec{v}(r=a,\theta) = \vec{0}$.

Avec le champ de vitesse fourni, on a :

$$\vec{v}(a,\theta) = v_0\cos\theta\left(1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\vec{e_r} - v_0\sin\theta\left(1-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)\vec{e_\theta} = \vec{0} \text{ : ok.}$$

Et à l'infini : $\vec{v}(r\to\infty,\theta) = v_0\cos\theta\,\vec{e_r} - v_0\sin\theta\,\vec{e_\theta} = v_0\vec{u_z}$: ok.



$v_0\vec{u_z} = v_0\cos\theta\,\vec{e_r} - v_0\sin\theta\,\vec{e_\theta}$.

⑦ L'écoulement est incompressible $\Rightarrow \text{div}\,\vec{v} = 0$.

Il est aussi invariant par rotation d'angle φ, donc $v(r,\theta,\cancel{\varphi})$ et $\vec{v} = v_r\vec{e_r} + v_\theta\vec{e_\theta} \in (0,\vec{e_r},\vec{e_\theta})$ par symétrie.

En application du rotationnel fourni en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{v} = 0\,\vec{e_r} + 0\,\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\vec{e_\varphi}.$$

Or
$$\begin{cases} \dfrac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} = -v_0\sin\theta\left[1 - 0 + \dfrac{a^3}{4}\dfrac{2}{r^3}\right] \\ \dfrac{\partial v_r}{\partial\theta} = -v_0\sin\theta\left[1 - \dfrac{3a}{2r} + \dfrac{a^3}{2r^3}\right] \end{cases}$$

donc $\boxed{\vec{\text{rot}}\,\vec{v} = -v_0\sin\theta\,\frac{3a}{2r^2}\,\vec{e_\varphi}}$ et $\boxed{\alpha = \frac{3}{2}}$.

⑧ Partant de Navier-Stokes : $\vec{\text{grad}}\,P = \eta\vec{\Delta}\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}\vec{e_\theta} = -\eta\,\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\,\vec{v}).$$

On injecte le résultat de la question ⑦ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \dfrac{+\eta}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[\dfrac{3a v_0}{2r^2}\sin^2\theta\right] = \dfrac{3a v_0\eta}{r\cancel{\sin\theta}}\dfrac{\cancel{2}\cos\theta\cancel{\sin\theta}}{\cancel{2}\,r^2} = \dfrac{3a v_0\cos\theta}{r^3}\eta \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial\theta} = -\dfrac{\eta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{3a v_0\sin\theta}{2r}\right] = +\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{3a v_0\sin\theta}{2r^2}\eta = \dfrac{3a v_0\sin\theta}{2r^3}\eta \end{cases}$$

En intégrant par rapport à r :

$$P(r,\theta) = -\frac{3aV_0\eta\cos\theta}{2r^2} + f(\theta)$$

En intégrant par rapport à θ :

$$P(a,\theta) = -\frac{3aV_0\cos\theta}{2r^2} + g(r)$$

donc $f(\theta) = g(r) = \text{cste}$.

Condition aux limites ($r \to \infty$, $\forall\theta$) : $\text{cste} = P_\infty$.

On obtient, $\forall M$: $\boxed{P(M) = P_\infty - \underbrace{\boxed{\frac{3aV_0\eta}{2}}}_{\beta}\frac{\cos\theta}{r^2}}$ β.

⑨ $d\vec{F_p} = -P(M)\,\vec{dS}$ est à projeter sur $\vec{u_z}$ pour éliminer du calcul de $\vec{F_p}$ les contributions qui se compensent.

Ainsi, $\vec{F_p} = -\int_{\theta=0}^{\pi} P(M)\cos\theta \cdot a^2\sin\theta\, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\ \vec{e_z}$

$$\vec{e_z}\cdot\vec{F_p} = -2\pi a^2 P_\infty \int_0^\pi \sin\theta\cos\theta\, d\theta + 2\pi\beta\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$= -2\pi a^2 P_\infty\left[\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^\pi + 2\pi\beta\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} \quad \text{avec} \begin{cases} u = \cos\theta \\ du = -\sin\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$= 0 + 2\pi\beta\frac{2}{3}$$

donc $\boxed{\vec{F_p} = 2\pi\eta a V_0\,\vec{e_z}}$.

⑩ On projette de la même façon les contributions $\vec{dF_c}$ sur l'axe $\vec{e_z}$, par symétrie de celles-ci :

$$\vec{F_c} = \int dF_c(-\sin\theta)\ \vec{e_z}.$$

$$= \eta a^2 \int_0^\pi \left.\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right|_a \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\,(-\sin\theta)\ \vec{e_z}$$

or $\frac{\partial V_\theta}{\partial r} = -V_0\sin\theta\left[\frac{3a}{4r^2} + \frac{3a^3}{4r^4}\right]$ donc $\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)_a = -\frac{3}{2a}V_0\sin\theta$.

Ainsi, $\vec{F_c} = +\frac{3}{\cancel{2}}\eta a V_0 \cancel{2}\pi \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta$ avec $\sin^3\theta = \sin\theta(1-\cos^2\theta)$
(et $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta\, d\theta$)

soit $\vec{F_c} = +\eta a V_0 \frac{3}{2} 2\pi \frac{4}{3}\ \vec{e_z}$

$$\boxed{\vec{F_c} = 4\pi\eta a V_0\ \vec{e_z}}.$$

⑪ La traînée $\vec{F}$ est la résultante des forces de pression et de cisaillement :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F_p} + \vec{F_c} = 6\pi\eta a V_0\ \vec{e_z}}.$$

On retrouve bien la force de Stokes $\vec{F_s} = -6\pi\eta a\vec{V}$.

II Glissement d'un gaz à la surface d'un solide.

(12) Question peu claire. Pas de vecteurs (?).

Seule la moitié des molécules font des collisions, les autres poursuivent à la vitesse u_i.

Une proportion σ des collisions se traduisent par une adhérence à la paroi fixe, tandis que la proportion $1-\sigma$ repart à la vitesse u_i.

Ainsi, en moyenne : $u_r = \frac{u_i}{2} + \frac{1}{2}\left[\sigma \cdot 0 + (1-\sigma)u_i\right]$

$$\boxed{u_r = \frac{2-\sigma}{2} u_i}.$$

La vitesse de glissement est la vitesse relative avec la paroi, mais celle-ci étant fixe $u_g = u_r - u_p = u_r$.

(13) On écrit $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_0 \simeq \frac{u_i(\ell) - u_i(0)}{\ell} = \frac{u_i - u_g}{\ell}$

autrement dit $u_g = u_i - \ell \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_0$.

Condition de Maxwell : $u_g = b \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_0 = \frac{b}{\ell}(u_i - u_g)$

soit $u_g = \frac{b}{b+\ell} u_i = \frac{2-\sigma}{\sigma} u_i \Rightarrow \boxed{b = \frac{2-\sigma}{2\sigma - 2}\ell}$. (intérêt ?)

(14) Ecoulement de Poiseuille sans pesanteur, incompressible stationnaire et parallèle à $\vec{e_x}$: $u(x,z)\vec{e_x}$.

- $\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} = 0$ donc $\underline{\vec{u} = u(z)\vec{e_x}}$.
- $(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{u} = \vec{e_x}\, u(z)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(z)\right] = \vec{0}$.

On écrit alors ainsi l'équation de Navier-Stokes selon $\vec{e_x}$:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{G}{\eta} z + A.$$

(15) $u(z) = -\frac{G}{2\eta} z^2 + Az + B$, avec $\begin{cases} 0 = -\frac{G}{2\eta}\frac{h^2}{4} - \frac{Ah}{2} + B \\ 0 = -\frac{G}{2\eta}\frac{h^2}{4} + \frac{Ah}{2} + B \end{cases}$

Par somme et différence on trouve :

$A = 0$ et $B = \frac{Gh^2}{8\eta}$.

Ainsi, $$\boxed{u_{ng}(z) = \frac{G}{2\eta}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right]}.$$

On en déduit le débit volumique $Q_{ng} = \iint_{\text{section entre les plans}} \vec{u}_{ng}\cdot d\vec{S} = \int_{-h/2}^{+h/2} u_{ng}\,\omega\,dz$.

$$Q_{ng} = \frac{\omega G}{2\eta}\left\{\left(\frac{h}{2}\right)^2 h - \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\right\} = \frac{\omega G h^3}{\eta}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right).$$

$$\boxed{Q_{ng} = \frac{\omega G h^3}{12\eta}}.$$

(16) On conserve le profil $u(z) = -\frac{G}{2\eta} z^2 + A' z + B'$ avec les conditions aux limites de glissement :

$$\begin{cases} u\left(-\frac{h}{2}-b\right) = 0 = -\frac{G}{2\eta}\left(\frac{h}{2}+b\right)^2 - A'\left(\frac{h}{2}+b\right) + B' \\ u\left(\frac{h}{2}+b\right) = 0 = -\frac{G}{2\eta}\left(\frac{h}{2}+b\right)^2 + A'\left(\frac{h}{2}+b\right) + B' \end{cases}$$

Somme et différence $\Rightarrow A' = 0$ et $B' = \frac{G}{2\eta}\left(\frac{h}{2}+b\right)^2$.

Ainsi, $\boxed{u_g(z) = -\frac{G}{2\eta} z^2 + \frac{G}{2\eta}\left(\frac{h}{2}+b\right)^2}$.

On en déduit le nouveau débit volumique :

$$Q_g = \int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} u_g(z).\omega.dz = \frac{\omega G}{2\eta}\left[h\left(\frac{h}{2}+b\right)^2 - 2\frac{(h/2)^3}{3}\right]$$

$$Q_g = \frac{\omega G h^3}{2\eta}\left[\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{2b}{h}\right)^2 - \frac{1}{12}\right] = \frac{\omega G h^3}{12\eta}\left[\frac{3}{2}\left(1+2\xi\right)^2 - \frac{1}{2}\right]$$

soit $\boxed{Q_g = Q_{ng}\left[\frac{3}{2}\left(1+2\xi\right)^2 - \frac{1}{2}\right]} \xrightarrow{b \to 0} Q_{ng}$. (cohérent)

Notons que pour un écoulement avec un fort glissement, le débit Q_g devient très élevé. Ex : $Q_g(\xi=1) = 13\, Q_{ng}$.

(NB) En utilisant plutôt la condition explicite de Maxwell, on trouve $Q_g = Q_{ng}(1+6\xi)$.

III Approche microscopique de la viscosité.

(17) La vitesse d'agitation thermique δv est définie par

$$\langle E_c \rangle_{\substack{\text{1 molécule} \\ \text{monoatomique}}} = \frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{2} m (\delta v)^2 = \frac{1}{2}\frac{M_a}{\mathcal{N}_A}(\delta v)^2$$

soit $\delta v = \sqrt{\frac{3RT}{M_a}} \simeq 500\ \text{m.s}^{-1}$ (gaz monoatomique)

ou $\delta v = \sqrt{\frac{5RT}{M_a}} \simeq 650\ \text{m s}^{-1}$ (gaz diatomique).

(18) Dans ce modèle, les collisions ont pour seul rôle de créer l'agitation thermique (isotrope, de vitesse δv), et le transfert de quantité de mouvement résulte uniquement du passage de molécules de A vers B et inversement : les couches A et B sont donc ici des systèmes ouverts.

→ la couche A reçoit des molécules dont la vitesse est

$$u(z+\ell)\,\vec{e_x} - \delta v\,\vec{e_z} \,;$$

et elle perd des molécules de vitesse $u(z-\ell)\vec{e_x} + \delta v\,\vec{e_z}$.

Ainsi, $d\vec{P_A} = Nm\left\{\left[u(z+\ell) - u(z-\ell)\right]\vec{e_x} - 2\,\delta v\,\vec{e_z}\right\}$.

où $N = \frac{n}{6} \ell S = \frac{n}{6} \tau . \delta v . S$ est le nombre de molécules mobilisables pour passer de B vers A.

$$\overrightarrow{dP_A} = \frac{n}{6} \tau . \delta v . S . m \left\{ -2 \delta v \overrightarrow{e_z} + [u(z+\ell) - u(z-\ell)] \overrightarrow{e_x} \right\}.$$

(19) La force exercée sur la couche A est le taux de variation de quantité de mouvement :

$$\overrightarrow{F_{B\to A}} = \frac{\overrightarrow{dP_A}}{\Delta t} = \frac{n}{6} \delta v . S . m \left\{ [u(z+\ell) - u(z-\ell)] \overrightarrow{e_x} - 2 \delta v \overrightarrow{e_z} \right\}$$

Le terme tangentiel correspond à la force de cisaillement entre les couches A et B, selon $\overrightarrow{e_x}$: il est contenu par le gradient de vitesse $[u(z+\ell) - u(z-\ell)]/2\ell$ du mouvement d'ensemble.

Le terme normal donne une contrainte selon $\overrightarrow{e_z}$ qui vaut $F_z/S = \frac{n}{3} m (\delta v)^2$, c'est la pression cinétique. (NB) $\delta v \gg u(z)$!

(20) Developpement de Taylor à l'ordre 1 :

$$u(z \pm \ell) = u(z) \pm \frac{\ell}{1!} \frac{\partial u}{\partial z} + o(\ell).$$

On en déduit : $u(z+\ell) - u(z-\ell) \simeq 2\ell \frac{\partial u}{\partial z}$.

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{F_{B\to A}} = \frac{n m \ell . \delta v}{3} . \frac{\partial u}{\partial z} . S \overrightarrow{e_x} = + \eta . \frac{\partial u}{\partial z} . S \overrightarrow{e_x}}$.

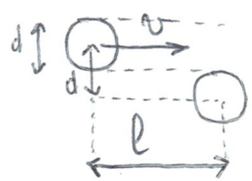
AN : $\eta_{air} = \frac{n_{air}}{3} m \ell \delta v \rightarrow$ monoatomique à $T \simeq 300 K$ manifestement.

avec $n_{air} = \frac{N_{air}}{V} = \frac{n_{air} N_A}{V} \overset{GP}{=} \frac{P}{RT} . N_A$ et $m = \frac{M_a}{N_A}$.

donc $\eta_{air} = \frac{P}{RT} M_a \ell \delta v \simeq \frac{10^5 . 0{,}029}{8{,}31 . 300} . 60.10^{-9} . 500$

soit $\underline{\eta_{air} \simeq 3.10^{-5} \text{ Pa.s}}$ (valeur tabulée : 2.10^{-5} Pa.s).

(21) Modèle de collisions de sphères dures (hors-programme)



Section efficace de collision $\sigma = \pi d^2$

Sur une distance ℓ égale au lpm, le nombre de collisions dans un gaz de densité n s'écrit :

$n \sigma \ell = n \pi d^2 \ell$ ... et il vaut 1 (par définition).

Ainsi $\eta_{air} = \frac{m}{3} . \delta v . n \ell = \frac{m . \delta v}{3} \frac{1}{\pi d^2} \rightarrow$ indépendant de la pression !

La viscosité du gaz est contrôlée par sa température, en $\underline{\delta v \propto \sqrt{T}}$.

(22) Le graphe est linéaire de pente $\alpha \simeq \frac{0{,}25}{0{,}40} \simeq \frac{2}{3}$.

On a donc $\ln\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right) = \alpha \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^\alpha$.

Ainsi les mesures à haute T donnent plutôt $\eta = \text{cste } T^{2/3}$ au lieu de $\eta = \text{cste } T^{1/2}$.