

Tout résultat d'un calcul devra présenter le bon nombre de chiffres significatifs. La notation tiendra largement compte du soin apporté à la rédaction. Encadrer les résultats. Les deux problèmes sont à réaliser sur des copies différentes.

Problème 1 : QCM (d'après ENAC)

Les trois parties du QCM sont indépendantes

Chaque question contient au plus deux réponses exactes.

Vous pouvez donc choisir de donner 1 ou 2 réponses à chaque question sur votre copie ; une justification est attendue.

1) Partie 1

- Parmi les affirmations suivantes concernant un gaz parfait, quelles sont les affirmations fausses ?
 A) L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température.
 B) À volume constant, la pression d'un gaz parfait dont le nombre de moles est fixé n'est inversement proportionnel qu'à sa température.
 C) À volume constant, la pression d'un gaz parfait dont le nombre de moles est fixé n'est inversement proportionnel qu'au nombre de moles du gaz.
 D) À température constante, le produit de la pression d'un gaz parfait, dont le nombre de moles est fixé, par le volume qu'il occupe est constant.
- Une bouteille de volume $V_1 = 100$ L contient du diazote, à la température $T_1 = 300$ K, sous la pression $p_1 = 10$ bar. Quel est le nombre n_1 de moles de diazote dans la bouteille ? On donne $R \approx 8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.
 A) $n_1 = p_1 V_1 / (RT_1)$, B) $n_1 = RT_1 / (p_1 V_1)$, C) $n_1 \approx 400$ mol, D) $n_1 \approx 40$ mol
- Sachant que la masse molaire du diazote est $M_m = 28 \text{ g.mol}^{-1}$, quelles est la masse volumique ρ_m du gaz dans la bouteille ?
 A) $\rho_m = M_m / (n_1 V_1)$, B) $\rho_m = n_1 M_m / V_1$, C) $\rho_m \approx 11 \text{ g.m}^{-3}$, D) $\rho_m \approx 11 \text{ kg.m}^{-3}$.
- On ouvre la bouteille et le diazote se détend à l'air libre, dont la pression et la température sont respectivement $p_a = 1$ bar et $T_a = 300$ K. Exprimer le volume V_2 du diazote détendu.
 A) On ne peut pas le déterminer, B) $V_2 = V_1$, C) $V_2 = p_a V_1 / p_1$, D) $V_2 = p_1 V_1 / p_a$
- Calculer le volume V de diazote qui s'est échappé de la bouteille.
 A) $V \approx 200$ L, B) $V \approx 10$ L, C) $V \approx 900$ L, D) $V \approx 90$ L
- Dans la gamme de température considérées dans l'exercice, l'énergie interne du gaz parfait s'écrit $U = 5nRT/2$, où T est la température du gaz et n son nombre de moles. Calculer l'énergie interne U_1 du diazote comprimé dans la bouteille, puis celle U_2 du diazote détendu.
 A) $U_1 \approx 24$ J, B) $U_1 \approx 240$ kJ, C) $U_2 = U_1$, D) $U_2 \approx 240$ J

2) Partie 2

Du diazote, assimilé à n moles de gaz parfait occupant un volume initial V_i , de température et pression initiales $T_i = 300$ K et $p_i = 3$ bar, subit dans cet ordre :

- Une transformation adiabatique qui amène le gaz à une température T_1 et une pression $p_1 = p_i(1+x)$; le volume du gaz est alors V_1 . En outre, la transformation est supposée réversible.
 - Une transformation isobare qui amène le gaz à son état final caractérisé par la température $T_f = T_i$ et le volume V_f .
- On note γ le rapport de la capacité thermique à pression constante sur la capacité thermique à volume constant du gaz. R désigne la constante des gaz parfaits.

- Donner les expressions de V_1 et V_f en fonction de V_i , x et γ .
 A) $V_1 = V_i(1+x)^{1/\gamma}$, B) $V_1 = V_i(1+x)^{-1/\gamma}$, C) $V_f = \frac{V_i}{1+x}$, D) $V_f = V_i(1+x)$
- Donner l'expression de T_1 en fonction de T_i , x et γ .
 A) $T_1 = T_i(1+x)^{(1-\gamma)/\gamma}$, B) $T_1 = T_i(1+x)^{(\gamma-1)/\gamma}$, C) $T_1 = T_i(1+x)^{1/\gamma}$, D) $T_1 = T_i(1+x)^{-1/\gamma}$
- Que peut-on dire de la variation d'énergie interne ΔU du gaz entre l'état initial et l'état final ?
 A) $\Delta U < 0$, B) $\Delta U > 0$, C) $\Delta U = 0$, D) On ne peut rien dire
- Que peut-on dire de la variation d'entropie ΔS du gaz entre l'état initial et l'état final ? On donne l'entropie $S(T, V)$ d'un gaz parfait en fonction de sa température et de son volume :

$$S(T, V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T) + nR \ln\left(\frac{V}{n}\right) + cte,$$

où cte est une constante.

- A) $\Delta S = 0$, B) $\Delta S = -nR \ln(1+x)$, C) $\Delta S = nR \ln(1+x)$, D) On ne peut rien dire

11. Que valent la chaleur (ou transfert thermique) Q_1 et le travail (ou transfert mécanique) W_1 reçus par le gaz à l'issue de la première transformation (adiabatique réversible) ?
 A) $Q_1 = 0$, B) $Q_1 = n \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_i)$, C) $W_1 = nRT_i \frac{1}{\gamma-1} [1 - (1+x)^{1-1/\gamma}]$, D) $W_1 = -nRT_i \frac{1}{\gamma-1} [1 - (1+x)^{1-1/\gamma}]$
12. Quelle est la variation d'énergie interne ΔU_2 lors de la seconde transformation (isobare) ?
 A) $\Delta U_2 = 0$, B) $\Delta U_2 = W_1$, C) $\Delta U_2 = -W_1$, D) $\Delta U_2 = W_1/2$

3) Partie 3

Un moteur thermique à air fonctionne en cycle fermé au cours duquel n moles d'air, assimilées à un gaz parfait, subissent entre quatre états E_1 , E_2 , E_3 et E_4 les transformations réversibles suivantes :

$E_1 \rightarrow E_2$ une compression isentropique

$E_2 \rightarrow E_3$ une compression isochore

$E_3 \rightarrow E_4$ une détente isentropique

$E_4 \rightarrow E_1$ une détente isochore.

On désigne par p_k , V_k et T_k les pressions, volumes et températures des états E_k , où $k = 1, 2, 3$ ou 4 : On pose $V_M = V_1 = V_4$ et $V_m = V_2 = V_3$ et on introduit le facteur de compression $a = \frac{V_M}{V_m}$. On note R la constante des gaz parfaits et $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$, le rapport de la capacité thermique molaire à pression constante sur la capacité thermique molaire à volume constant. On note respectivement Q et W la chaleur (transfert thermique) et le travail (transfert mécanique) algébriquement reçu par le gaz au cours d'un cycle et Q_{ij} et W_{ij} respectivement la chaleur et le travail algébriquement reçu par le gaz lors de la transformation menant de l'état E_i à l'état E_j

13. On note Q_c la chaleur échangée avec la source chaude. Que peut-on affirmer ?
 A) $Q_c = Q_{41}$, B) $Q_c = Q_{23}$, C) $Q_c = nC_{pm}(T_3 - T_2)$, D) $Q_c = nC_{vm}(T_4 - T_1)$
14. On note Q_f la chaleur échangée avec la source froide. Que peut-on affirmer ?
 A) $Q_f = Q_{41}$, B) $Q_f = Q_{23}$, C) $Q_f = nC_{pm}(T_3 - T_2)$, D) $Q_f = nC_{vm}(T_1 - T_4)$
15. Exprimer l'efficacité η de cette machine, rapport du transfert d'énergie utile, compte tenu de sa vocation, sur le transfert d'énergie nécessaire pour la faire fonctionner :
 A) $\eta = \frac{Q_{23}}{Q_{23}+Q_{41}}$, B) $\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$, C) $\eta = 1 - \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$, D) $\eta = \frac{Q_{23}}{Q_{23}-Q_{41}}$
16. Déterminer les températures T_1 et T_3 en fonction des températures T_2 et T_4 .
 A) $T_1 = T_2 a^{1-\gamma}$, B) $T_1 = T_2$, C) $T_3 = T_4 a^{\gamma-1}$, D) $T_3 = T_4$
17. Exprimer η en fonction des températures T_k
 A) $\eta = 1 + \frac{T_1-T_4}{\gamma(T_3-T_2)}$, B) $\eta = 1 + \frac{T_1-T_4}{T_3-T_2}$, C) $\eta = 1 + \frac{\gamma(T_1-T_4)}{T_3-T_2}$, D) $\eta = \frac{T_3-T_2}{T_1-T_4+T_3-T_2}$
18. L'efficacité η peut-elle s'exprimer en fonction seulement de a et γ , et si oui, quelle est sa valeur ?
 A) Oui, B) Non, C) $\eta = 1 - a^{1-\gamma}$, D) $\eta = 1 + a^{-\gamma}$

Problème 2 : Le moteur de Stirling, d'après CCINP

Le moteur de Stirling est constitué de deux chambres, une chaude, une froide, reliées par un régénérateur de volume constant pouvant être constitué de fils de cuivre tressés. Le gaz, en circuit fermé, reçoit un transfert thermique d'une source chaude et cède un transfert thermique à la source froide. Le rôle du régénérateur, base de l'invention de Stirling, est fondamental pour obtenir une bonne efficacité. Dans son brevet original de 1816, Stirling explique que le gaz chaud entre dans la partie chaude du régénérateur et est progressivement refroidi durant son parcours pour ressortir par l'autre extrémité à une température presque identique à la température de la source froide. Dans le parcours inverse, le gaz est progressivement réchauffé. Cette astuce technologique permet d'avoir une partie des échanges thermiques internes au moteur.

Ce problème comporte 2 parties. La première partie permet de comprendre l'intérêt du régénérateur dans le calcul de l'efficacité. La seconde partie analyse le rôle du volume et des pertes thermiques dans un régénérateur réel.

DONNÉES DU PROBLÈME

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Masse molaire du dihydrogène H_2 : $M = 2,00.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$
- Rapport des capacités thermiques pour H_2 : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,40$
- Masse volumique du cuivre : $\rho = 8913 \text{ kg.m}^{-3}$
- Capacité thermique massique du cuivre : $c = 387 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Description du cycle de Stirling

Le cycle associé à un moteur de Stirling est constitué de 2 isothermes et de 2 isochores. Il est décrit comme suit :

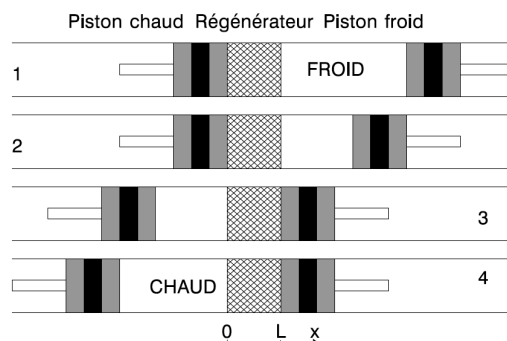
1→2 : compression isotherme à $T_f = 313$ K

2→3 : transformation isochore de la température $T_f = 313$ K à la température $T_C = 1173$ K

3→4 : détente isotherme à $T_C = 1173$ K

4→1 : transformation isochore de la température $T_C = 1173$ K à la température $T_f = 313$ K

Ce cycle est représenté ci-dessous



Caractéristiques du moteur de Stirling retenu

Température de la source chaude : 1173 K

Température de la source froide : 313 K

Volume minimum du gaz libre (uniquement chambre chaude et/ou froide) : $V_m = 1,0$ L

Volume maximum du gaz libre (uniquement chambre chaude et/ou froide) : $V_M = 2,0$ L

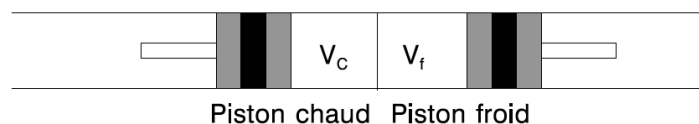
Volume du régénérateur accessible au gaz quand il est pris en compte : $V_r = 0,2$ L

Volume du régénérateur occupé par du cuivre : 0,6 L

Masse de dihydrogène, traitée comme un gaz parfait, contenue dans le moteur : 0,01 kg.

1) Moteur de Stirling avec un régénérateur parfait

Les questions 1)1 à 1)9 ne tiennent pas compte de la présence du régénérateur. Dans toutes les questions de cette partie 1), le volume du régénérateur est nul ($V_r = 0$), comme indiqué sur la figure ci-dessous.



- 1)1. À partir des caractéristiques du moteur de Stirling, déterminer numériquement le nombre de moles n de gaz et les pressions p_1 , p_2 , p_3 et p_4 .
- 1)2. Représenter le cycle moteur de Stirling sur un diagramme $p(V)$.
- 1)3. Exprimer algébriquement la variation d'énergie interne ΔU_{ab} et les transferts énergétiques, W_{ab} et Q_{ab} , entre un état a et un état b pour une transformation isotherme.
- 1)4. Exprimer algébriquement la variation d'énergie interne ΔU_{cd} et les transferts énergétiques, W_{cd} et Q_{cd} , entre un état c et un état d pour une transformation isochore.
- 1)5. Calculer numériquement les travaux $W_{1\rightarrow 2}$, $W_{2\rightarrow 3}$, $W_{3\rightarrow 4}$, $W_{4\rightarrow 1}$
- 1)6. Calculer numériquement les transferts thermiques $Q_{1\rightarrow 2}$, $Q_{2\rightarrow 3}$, $Q_{3\rightarrow 4}$, $Q_{4\rightarrow 1}$
- 1)7. Que valent les transferts thermiques Q_C et Q_f provenant des thermostats chaud et froid si aucun dispositif supplémentaire n'intervient (pas de régénérateur) en fonction des transferts thermiques $Q_{1\rightarrow 2}$, $Q_{2\rightarrow 3}$, $Q_{3\rightarrow 4}$ et $Q_{4\rightarrow 1}$? Effectuer l'application numérique.
- 1)8. Que vaut le travail W sur le cycle ? Effectuer l'application numérique.
- 1)9. En déduire numériquement l'efficacité sans régénérateur (e_{sr}).

En présence d'un régénérateur parfait (volume négligeable, transfert parfait), les transferts thermiques $Q_{2\rightarrow 3}$ et $Q_{4\rightarrow 1}$ sont internes.

- 1)10. Vérifier que les transferts thermiques $Q_{2\rightarrow3}$ et $Q_{4\rightarrow1}$ se compensent.

L'efficacité est alors calculée à partir de

$$e = -\frac{W_{1\rightarrow2} + W_{3\rightarrow4}}{Q_{3\rightarrow4}}$$

- 1)11. Justifier cette expression.
 1)12. Calculer algébriquement et numériquement l'efficacité (e).
 1)13. Comparer l'efficacité (e) à l'efficacité de Carnot (e_C).

2) Régénérateur non idéal : Influence du volume mort du régénérateur (DIFFICILE)

Le régénérateur peut être constitué d'un empilement de disques de fils de cuivre tressés. On suppose que la température dans le régénérateur varie linéairement avec l'abscisse selon la loi :

$$T(x) = T_C + \frac{x}{L} (T_f - T_C)$$

On prendra pour origine des abscisses la frontière chambre chaude/régénérateur. L représente la longueur du régénérateur. On ne tiendra nullement compte des aspects dynamiques. Il n'y a pas d'échange thermique entre les tranches élémentaires de fluide. Le volume accessible au gaz dans le régénérateur V_r est aussi appelé volume mort.

Dans le régénérateur, le gradient de température conduit à une distribution de densité moléculaire en fonction des abscisses. Il est donc intéressant de remplacer cette distribution liée au gradient de température par un système équivalent d'un point de vue mécanique : le régénérateur sera alors supposé occupé par n_r moles de dihydrogène à la température effective T_r , quelle que soit l'abscisse. Le volume mort du régénérateur vaut $V_r = 0,2$ L.

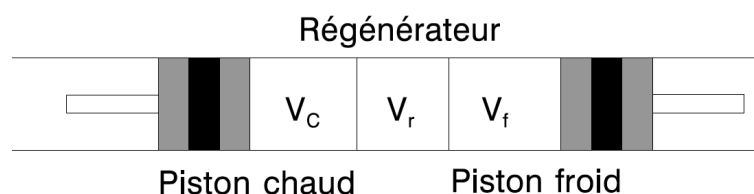
- 2)1. Dans le régénérateur, en considérant que la pression est homogène, montrer que la température effective moyenne T_r s'exprime selon

$$T_r = \frac{T_C - T_f}{\ln\left(\frac{T_C}{T_f}\right)}$$

- 2)2. Calculer numériquement T_r .

Pour les questions 2)3. à 2)6., toutes les molécules présentes dans le régénérateur seront supposées être à la température T_r .

- 2)3. À partir d'un bilan de matière, exprimer la pression p en fonction de n , R , des températures T_r , T_C , T_f et des volumes V_r , V_C et V_f , volumes associés au régénérateur, au piston chaud et au piston froid (voir figure ci-dessous). On considérera la pression identique dans le régénérateur et les deux chambres.



- 2)4. Exprimer littéralement le travail $W_{1\rightarrow2}$ puis effectuer l'application numérique.
 2)5. Exprimer littéralement le travail $W_{3\rightarrow4}$ puis effectuer l'application numérique.
 2)6. Comparer la valeur numérique du travail sur le cycle avec un volume mort de régénérateur de $V_r = 0,2$ L ($W_{V_r \neq 0}$) à sa valeur obtenue sans volume mort ($W_{V_r = 0}$). Commenter.

Pour les transferts thermiques, il est impératif de considérer le gradient de température dans le régénérateur.

- 2)7. En discrétisant l'ensemble du système en fines tranches, chaque tranche de gaz est toujours à la température du thermostat local aussi bien dans les chambres que dans le régénérateur. Y a-t-il création d'entropie au cours d'un cycle ? En déduire sans calcul l'efficacité.

3) Perte thermique dans le régénérateur (DIFFICILE)

Soit x la fraction de chaleur non échangée dans le régénérateur par le gaz lors de la transformation isochore (x varie de 0 à 1). Cette fraction est supposée identique dans les 2 sens de passage. Dans cette partie, le volume mort est supposé nul ($V_r = 0$).

3)1. Donner une raison qui pourrait expliquer que le transfert thermique n'est pas idéal.

3)2. Exprimer l'efficacité sous la forme :

$$e = \frac{1 - \frac{T_f}{T_C}}{1 + C_2 \left(1 - \frac{T_f}{T_C}\right)}$$

C_2 étant une constante à exprimer en fonction de x , γ , V_M et V_m .

3)3. Calculer numériquement C_2 et l'efficacité qui en résulte, en considérant un transfert non idéal correspondant à $x = 0,1$.

3)4. Le volume de cuivre nécessaire à la construction du régénérateur vaut 0,6 L. Estimer la variation de température du cuivre induite par le passage du gaz du piston froid au piston chaud ($2 \rightarrow 3$) dans le cas non idéal $x = 0,1$.