

Exercice 2 : Centrifugeuse à cosmonaute

1. Voir cours : $\vec{a} = -r\omega^2\vec{u}_r$ (mvt circulaire), soit $\|\vec{a}\| = \ell\omega^2 = 10g$, soit $\omega = \sqrt{\frac{10g}{\ell}} = 3,1 \text{ rad.s}^{-1}$ soit $\frac{3,1 \times 60}{2\pi} = 30$ tours/minute.
2. Décollage : astronaute assis face au centre de rotation ; entrée dans l'atmosphère : assis dos au centre de rotation.
3. Idem 1. : $\|\vec{a}\| = \ell\omega^2 = \frac{4\pi^2\ell}{T^2} = 28 \text{ m.s}^{-2} \approx 3,0.g$

Exercice 3 : Palet sur un plan incliné

1. Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin(\alpha)\vec{u}_x - \cos(\alpha)\vec{u}_y)$; Ox dirigé selon le plan incliné, vers le bas; Oy orthogonal au plan incliné, dirigé vers le haut.
2. Situation d'absence de glissement; le palet est au repos. BAME : $\vec{P}, \vec{N} = \|\vec{N}\|\vec{u}_y$ et $\vec{T} = -\|\vec{T}\|\vec{u}_x$.
Le PFD à l'équilibre donne $mg\sin(\alpha) = \|\vec{T}\|$ et $mg\cos(\alpha) = \|\vec{N}\|$
3. Lorsque $\alpha = \alpha_m$, $\|\vec{T}\| = mg\sin(\alpha_m) = f\|\vec{N}\| = fmg\cos(\alpha_m)$, soit $\tan(\alpha_m) = f$
4. Il y a glissement, et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$, soit $m\ddot{x} = mg\sin(\alpha) - \|\vec{T}\|$ avec $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmg\cos(\alpha)$ (projection sur Oy); $\ddot{x} = g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)) > 0$; on a donc un mouvement rectiligne accéléré.

Exercice 4 : Sismographe de la Coste

1. Système : point A de masse m ; référentiel terrestre galiléen; BAME : poids + force de rappel. Mouvement de rotation, on utilisera le TMC, et on se place en coordonnées polaires : $\vec{u}_r = \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}$, $\vec{u}_\theta$ orthogonal et dans le sens de θ .
 $\vec{\sigma}_M(O) = m\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z$; $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}}(O) = \vec{OA} \wedge \vec{P} = -mg\ell\cos(\theta)\vec{u}_z$; $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{T}}(O) = -\vec{OD} \wedge k\vec{BD} = d\vec{u}_r \wedge (\vec{BO} + \vec{OD}) = -d\vec{u}_r \wedge (\vec{BO} + d\vec{u}_r)$. $\vec{OB} = b(\cos(\alpha)\vec{u}_x + \sin(\alpha)\vec{u}_y) = b(\cos(\alpha)[\cos(\theta)\vec{u}_r + \sin(\theta)\vec{u}_\theta] + \sin(\alpha)[\sin(\theta)\vec{u}_r + \cos(\theta)\vec{u}_\theta])$ (utiliser formules trigo pour simplifier).
Le TMC en projection sur Oz donne : $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\cos(\theta) + kbd\sin(\alpha - \theta)$
2. A l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$ et $\theta = 0$, soit $\sin(\alpha) = \frac{mg\ell}{kbd}$
3. Avec formules trigo :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\cos(\theta) = \frac{kbd}{m\ell^2}(\sin(\alpha)\cos(\theta) - \cos(\alpha)\sin(\theta))$$

soit (avec la condition du 2.)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\cos(\theta) = \frac{g}{\ell}\cos(\theta) + \frac{g}{\ell\sin(\alpha)}(-\cos(\alpha)\sin(\theta))$$

ou encore (petits angles)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell\tan(\alpha)}\theta = 0$$

$$\text{Donc } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\tan(\alpha)}{g}}; \text{ AN : } \alpha = 89,97^\circ$$

Exercice 5 : Montagnes russes

1. Système conservatif, seul le poids est une force de puissance non nulle (réaction du support orthogonale au mouvement)
 - (a) $E_c(E) - E_c(A) = 0$ (vitesse nulle en A et E); $W(\vec{P} = \int_A^E \vec{P} \cdot d\vec{OM} = -mg \int_{z_A}^{z_E} dz$ (on prend l'axe Oz) vertical ascendant et $z = 0$ correspond à la droite en pointillés.
Le TEC donne $0 = -mg(h_1 - h)$ soit $h_1 = h$.
 - (b) Système conservatif : $E_m(E = E_m(A))$ soit $E_{p,pes}(E) = mgz_E = E_{p,pes}(A) = mgz_A$ (origine de l'énergie potentielle en B ou D). Même résultat
2. $h_1 = 8,0 \text{ m}$
 - (a) $E_c(E) - E_c(A) = 0$; $W(\vec{P} = mg(h - h_1))$; $W(\vec{f}) = \int_D^E \vec{f} \cdot d\vec{OM} = \vec{f} \cdot \vec{DE}$ (car force constante). Soit $W(\vec{f}) = -\vec{f} \cdot \vec{DE} = -fh_1\sin(\alpha)$.
On trouve : $f = \frac{mg(h-h_1)}{h_1\sin(\alpha)}$
 - (b) On retrouve le même résultat, on ne calcule pas le travail du poids mais l'énergie potentielle de pesanteur.

Exercice 6 : Bille dans une gouttière

- Entre A et O : système conservatif (seul le poids et la réaction normale du support s'appliquent), on a donc $E_m(A) = E_m(O)$, et donc si on prend l'altitude de O pour origine des énergies potentielles : $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$, soit $v_0 = \sqrt{2gh}$. En M, on a un mouvement circulaire, soit $\vec{v}_M = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ ou encore $v_M = a\dot{\theta} > 0$.
- En M, on applique le PFD (BAME identique) : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$, à projeter sur la base polaire : $a\ddot{\theta} = -g\sin(\theta)$ et $-ma\dot{\theta}^2 = mg\cos(\theta) - \|\vec{N}\|$. On intègre la première ED par-rapport au temps en la multipliant par $\dot{\theta}$: $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(0) = \frac{g}{a}(1 - \cos(\theta))$ que l'on peut injecter dans l'ED avec la réaction :

$$\|\vec{N}\| = mg\cos(\theta) + m\left((2g\cos(\theta) - 2g) + \frac{v_0^2}{a}\right) = mg(3\cos(\theta) - 2) + \frac{2gh}{a}$$
- Le mouvement est révolutif (la bille fait un tour), si la réaction ne s'annule pas en S (la bille ne décollera pas, donc), $\|\vec{N}\| > 0$, soit $h > \frac{5}{2}a$.

Exercice 7 : Le toboggan

- Système enfant assimilé à G (masse m) ; référentiel terrestre galiléen ; BAME : poids, réaction normale du support. On utilisera le TMC par-rapport à Oz orienté. $\sigma_G(Oz) = mr^2\dot{\theta}$; $\mathcal{M}_{\vec{P}} = \vec{OG} \wedge \vec{P} \cdot \vec{u}_z = mgr\cos(\theta)$ (>0 , car rotation dans sens positif) ; la réaction est centrale.
On a alors $mr^2\ddot{\theta} = mgr\cos(\theta)$, soit $\ddot{\theta} - \frac{g}{r}\cos(\theta) = 0$
- L'ED précédente ne peut être résolue (non linéaire, et l'approximation des petits angles ne tient pas, lors du mouvement). On multiplie cette équation par $\dot{\theta}$ et on intègre une fois par-rapport au temps :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{r}\sin(\theta) = cte = 0$$

De plus $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, donc $v = r\dot{\theta} = \sqrt{2rg\sin(\theta)}$. La vitesse maximale atteinte l'est pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, soit $v = \sqrt{2gr}$, qui est la même que la vitesse atteinte lors d'une chute libre. Heureusement, en réalité, il y a des frottements avec le toboggan pour diminuer la vitesse finale...

Exercice 8 : Voyage de la Terre à Mars

On notera $k = GmM_S$

- En D, sur l'ellipse, l'énergie mécanique du vaisseau est $E_m = -\frac{k}{2a}$ avec $2a = R_T + R_M$ (schéma). De plus, $E_m = \frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{k}{R_T}$, soit $v_D = \sqrt{\frac{2k.R_M}{mR_T(R_T+R_M)}}$
Sur la trajectoire circulaire, $v_T = 29,8 \text{ km.s}^{-1}$; le TEC en D donne : $m(v_D^2 - v_T^2) = 2W_{\text{moteur}}$, soit $w_{\text{moteur}} = \frac{W_{\text{moteur}}}{m} = \frac{1}{2}(v_D^2 - v_T^2)$
- En A, on a : $E_m = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{k}{R_M} = -\frac{k}{R_T+R_M}$ soit $v_A = \sqrt{\frac{2k.R_T}{mR_M(R_T+R_M)}}$
Idem 1.
- On parcourt une demi ellipse donc $\frac{T}{2}$ avec $\frac{T^2}{(R_T+R_M)^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}$ (3ème loi de Kepler.)
- Mars parcourt une distance $\frac{v_M T}{2}$ pendant le transfert du vaisseau. Or la longueur de cet arc correspond à un angle $\theta = (SM_1, SA)$ tel que $R_M \cdot \theta = \frac{v_M T}{2}$.

Exercice 8 : Périégée

-
- $a = \frac{d_P + d_A}{2}$
- $E_m = -\frac{GmM_T}{d_P + d_A}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{(d_P + d_A)^3}{8GM_T}}$.
- $\sigma_P(Oz) = d_P \cdot v_P = d_A v_A$ (car $v = r\dot{\theta}$ à l'apogée et au périégée : vitesse orthoradiale).
- $v_A = v_P \frac{d_P}{d_A}$